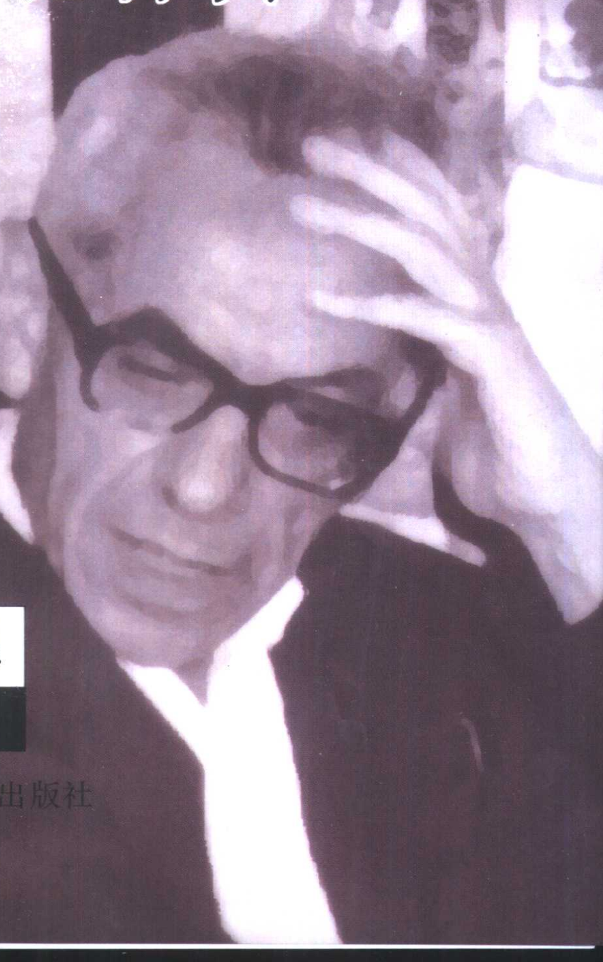
保罗·霍夫曼 著

米绪军 章晓燕 缪卫东 译

数字情种

——埃尔德什传

当代科技名家传记系列



哲人石丛书

上海科技教育出版社

The Man Who Loved Only Numbers:
The Story of Paul Erdős and the Search for Mathematical Truth
by
Paul Hoffman

责任编辑　卞毓麟　　装帧设计　汤世梁

哲人石丛书
数 字 情 种
——埃尔德什传
保罗·霍夫曼　著
米绪军　章晓燕　缪卫东　译

上海科技教育出版社出版发行
（上海冠生园路 393 号　邮政编码 200233）
各地新华书店经销　常熟市印刷二厂印刷
ISBN 7-5428-2373-6/N·377
图字 09-2000-309 号

开本 850×1168　1/32　印张 8.625　插页 10　字数 210 000
2000 年 8 月第 1 版　2000 年 8 月第 1 次印刷
印数 1-5000　　定价：21.00 元

保罗·埃尔德什在布达佩斯上学时的两幅肖像照。他母亲唯恐他从其他孩子那里传染上致命的疾病，所以多数时候都让他呆在家里。因此，这些在校照片便弥足珍贵了。







埃尔德什的护照照片。他持护照周游了25个国家。



约1921年(埃尔德什8岁)：他母亲最喜欢的照片之一。



约 1916 年（埃尔德什 3 岁）：和他母亲一起在匈牙利中部的巴拉顿湖。



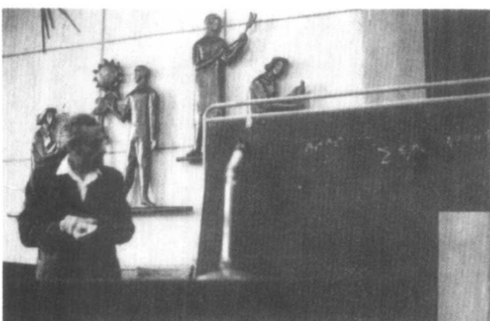
数十年后，埃尔德什和他母亲在位于马特劳哈佐的匈牙利科学院招待所中休息。



1941 年 8 月 14 日:在受到美国联邦调查局的质问后,28 岁的埃尔德什神情茫然地与另外两位数学家阿瑟·斯通和加久谷静雄在一起。这三位数学家被指控非法进入长岛一个军用无线电发射台附近地区并在那里令人可疑地闲逛。



1955 年：在列宁和斯大林的肖像下，埃尔德什在斯大林城（今多瑙新城）和匈牙利小学生们谈话。







埃尔德什喜欢演讲，或如他所说的“布道”。他在黑板前永远都很自如。



埃尔德什每天有19个小时用于证明和猜想，他否认在数学讨论会上睡着了。他会说：“我不是在睡觉，我是在思考。”



1989年8月：在睡觉还是在思考？在波兰波兹南举行的随机图论讨论会团体照上埃尔德什是唯一低垂着脑袋的人。第二排右起第二人是埃尔德什，右起第一人为格雷厄姆。乔尔·斯潘塞在格雷厄姆前面，斯潘塞旁边是金芳蓉。



1995 年 5 月：在埃默里大学的一次招待会上，被新授予名誉学位的埃尔德什和汉克·阿伦与数学家罗纳德·古尔德（站立者）及埃默里大学的一位官员在一起。1974 年 4 月 8 日，阿伦击出他的第 715 个本垒打，突破了巴比·鲁思于 1935 年创下的 714 次的纪录。714 和 715 这两个数具有某种特殊的数学性质——它们各自的素因数之和彼此相等。埃尔德什成功地证明有无穷多个数对都具有同样的性质。

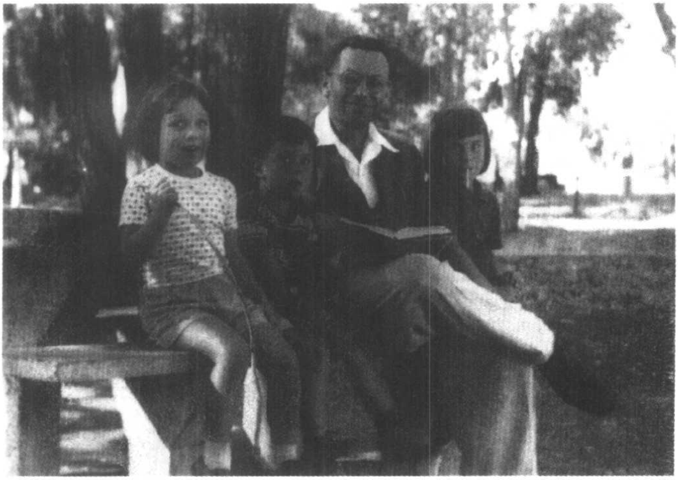


1989 年 8 月：在随机图论讨论会上埃尔德什主导了一次“随机”赛跑。他为起跑掷一颗大骰子，以确定跑的圈数。但当这些数学家们接近终点线时，埃尔德什再掷一次骰子，以确定再加跑几圈。



埃尔德什喜欢“ε”——他对小孩子的称呼(数学中希腊字母ε用来代表小量)。





20世纪70年代:埃尔德什和3个ε的照片,摄于加利福尼亚。左边的女孩叫博比,是安德鲁·瓦兹索尼的女儿。



伟大的英国数论家哈代，埃尔德什在离开匈牙利后的第二天就遇见了他。他厌恶应用数学："我的任何发现都没有，也不可能对平静的现实世界产生什么影响，不管是直接的还是间接的，也不管是正面的还是负面的。"



1919年护照上的照片：拉马努金，自学成才的印度天才，是对埃尔德什的一种激励，虽然这两个人从未见过面。



波兰移民数学家斯坦尼斯拉夫·乌拉姆（及妻子弗朗索瓦丝），与埃尔德什在50多年的时间里保持合作。“一个人衰老的第一个标志，”乌拉姆喜欢说，“是忘记了自己的定理，第二个标志是忘记拉上拉链，第三个标志是忘了拉开拉链。”



1993年：塞凯赖什和克莱因，两人都是移居国外的匈牙利人，在匈牙利凯斯特海伊的一次会议上与埃尔德什及金芳蓉一起庆祝埃尔德什的80大寿。20世纪30年代初在布达佩斯时，塞凯赖什、克莱因和埃尔德什蔑视法西斯政权对公开聚会的禁令，每天聚集在一个公园里谈论政治和做数学。



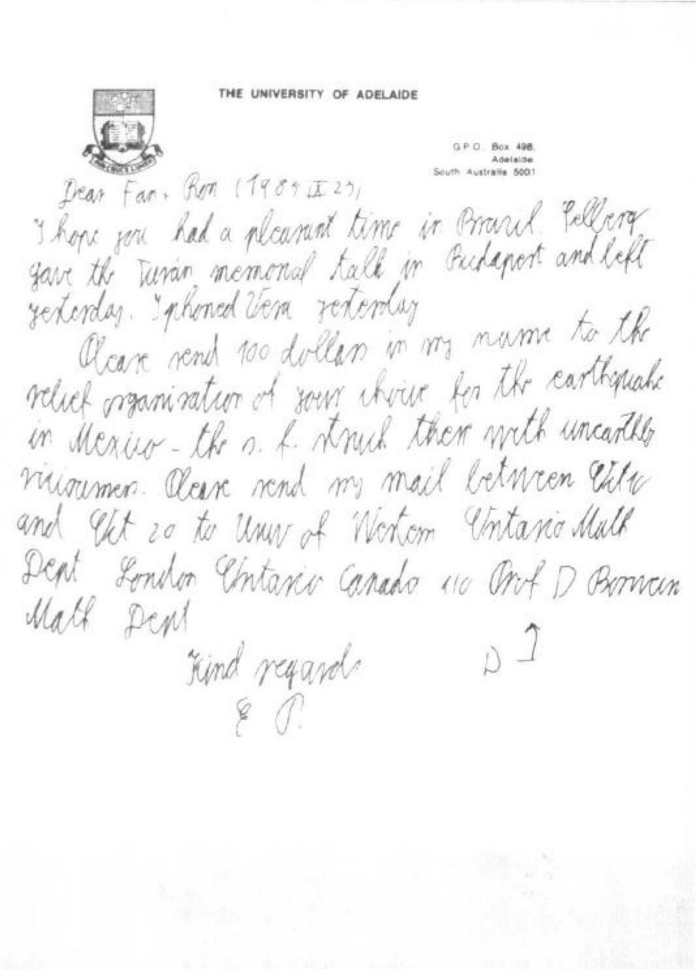
1993年：薇拉·索斯——埃尔德什最有成绩的合作者之一，也在凯斯特海伊埃尔德什的80大寿聚会上陪伴他。



索斯等待埃尔德什对一个难题的高见。“正因为难于解决，”埃尔德什相信，“才体现出努力的价值。”



在格雷厄姆的厨房里同两位未出道的数学家一起摆姿势：埃尔德什向著名人物和无名小辈都敞开他的大脑。


THE UNIVERSITY OF ADELAIDE

G.P.O. Box 498,
Adelaide
South Australia 5001

Dear Fan + Ron (1985 IX 23)

I hope you had a pleasant time in Brazil. Gellerg gave the Turan memorial talk in Budapest and left yesterday. I phoned Vera yesterday

Please send 100 dollars in my name to the relief organization of your choice for the earthquake in Mexico – the s.f. struck them with unearthly viciousness. Please send my mail between Oct 12 and Oct 20 to Univ of Western Ontario Math Dept London Ontario Canada c/o Prof D Borwein Math Dept

Kind regards
E P.

1985年8月9日:埃尔德什的一封信,值得注意的是信中没有数学符号(与他每天写的5封左右的数学信件不同)。埃尔德什将他的大多数钱捐给了慈善事业,信中他指示格雷厄姆和金芳蓉向地震救灾工作捐款100美元。

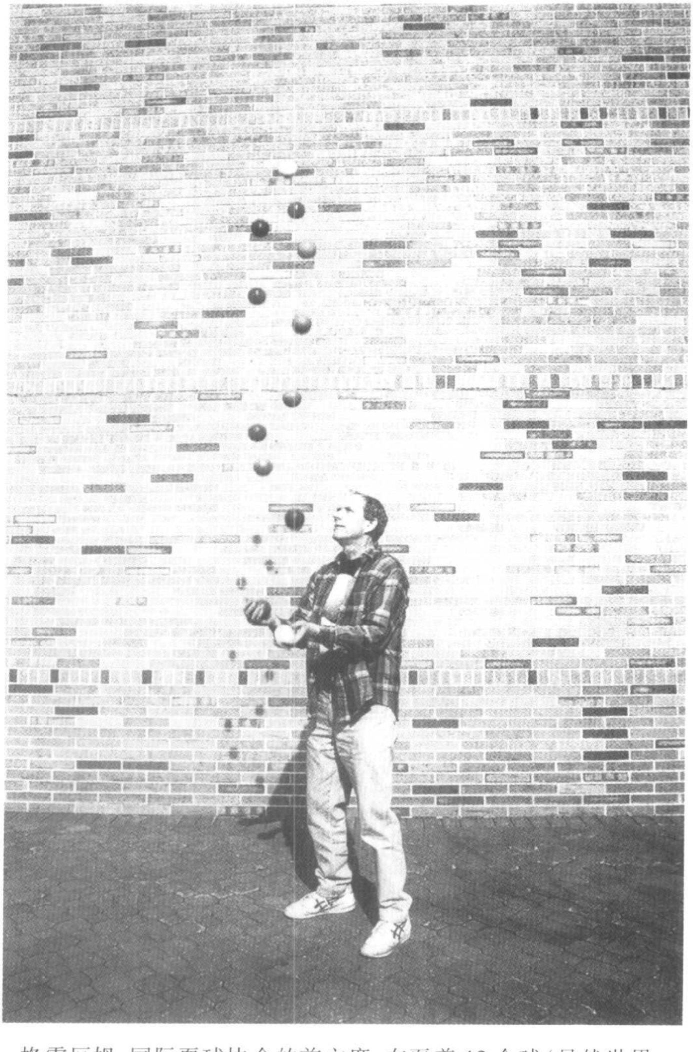




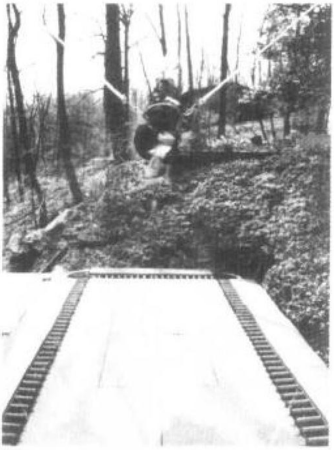
1988 年：在英国剑桥的 -次会议上，金芳蓉和埃尔德什在演讲后回答问题。格雷厄姆和埃尔德什正在苦思冥想一个证明



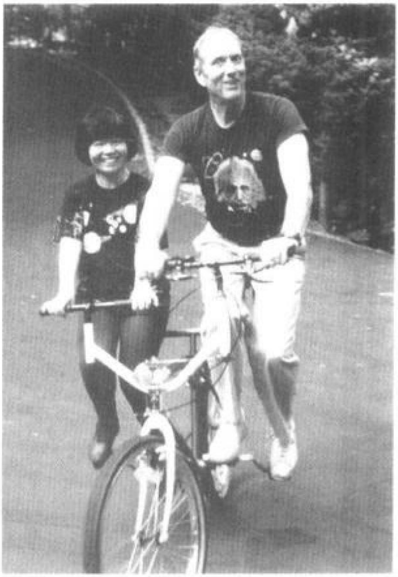
和金芳蓉及格雷厄姆一起解决一个恼人的难题：在将数学转化为一种社会活动方面，埃尔德什比其他任何人都更有责任心。



格雷厄姆，国际耍球协会的前主席，在耍着 12 个球(虽然世界纪录仅为 9 个)，这要归功于他女儿彻的数字修描技巧。



格雷厄姆在美国电话电报公司度过漫长的一天后，在他的蹦床上放松：“无论在哪儿，你都可以从事数学。有一次就在蹦床上三圈后滚翻当中，我获得了解决一个棘手的数学问题的灵感。”



金芳蓉和格雷厄姆在新泽西州他们家附近合骑双人自行车。“许多数学家，”格雷厄姆说，“会憎恨娶了同行中的某个人。他们担心彼此的关系会变得过于富有竞争性。”



格雷厄姆，不像埃尔德什，从不拿身体去换思想



20 世纪 80 年代中期：对镜头漫不经心的埃尔德什，在日本箱根山顶胜地举行的一次组合数学讨论会的休息期间，继续为一个很难对付的问题所萦绕。

内容提要

保罗·埃尔德什是当代罕有的数学奇才。他在60多年的数学生涯中，带着两件旧行囊，不停地奔波于各大洲的大学数学系和研究中心之间，在不同的数学领域内与大量合作者共同发表了1475篇高水平的学术论文。直至古稀之年，他每天还工作19个小时。他的思维能力无与伦比，却对日常生活束手无策；他童心未泯，极富同情心，抛弃一切物质享受，没有妻子和孩子，甚至居无定所，追求数学真理就是他的一切。

本书以情趣盎然的笔调，穿插数学史上的种种趣闻轶事，刻画出一幅栩栩如生的埃尔德什"肖像画"，同时也向读者展现了一代又一代数学家不屈不挠地迎战诸如"费马大定理"、"四色问题"这样的难题，直至取得辉煌胜利的动人故事。

作 者 简 介

保罗·霍夫曼生于1956年，住在美国伊利诺伊州的芝加哥和纽约州的伍德斯托克，是《不列颠百科全书》的出版商，美国公共广播公司“科学伟人”节目主持人，也是频频出现于哥伦比亚广播公司早间新闻和吉姆·莱雷尔(Jim Lehrer)新闻时间等电视栏目的著名记者。他曾有10年担任《发现》杂志的总裁和主编，著有《阿基米德的报复》等10余种书。

霍夫曼于1986年与埃尔德什首次晤面。1987年，他在《大西洋月刊》上对埃尔德什的介绍荣获美国杂志出版业中声望最高的褒奖——国家期刊奖。他追踪采访埃尔德什一生的最后10年，甚至风尘仆仆地跟随后者进行那绝无仅有的数学之旅，本书正是这一惊人之举的完美结晶。

献给 Palı bácsı,*

der Zauberer von Budapest,**

他借助朋友们的一点点帮助

以证明和猜想达到了不朽

献给罗恩

他使保罗一生最后39.76%的岁月变得较为安适

他还无私地奉献自己的时间

帮助我理解保罗的世界

献给安

她爱青蛙,爱诗,还爱我

---

* 匈牙利语,意为“保罗大叔”,指埃尔德什。——译者

** 德语,意为“来自布达佩斯的魔法师”。——译者

数学真理亘古不变；它超越现实物质世界……这就是我们的信仰，这就是我们动力的核心。我们想要向我们非数学界的朋友描述这种信仰，就像我们向无神论者描述上帝一样。保罗用数学真理体现了这种信仰。他把他伟大的天才和巨大的力量完全贡献给了数学的殿堂。他对他的追求的重要性和绝对性毫不怀疑，了解了他的信仰，你也就会产生同样的信仰。宗教界可能对保罗独特的个人品质更为了解。我们只知道人们管他叫“保罗大叔”。

——乔尔·斯潘塞(Joel Spencer)

继维特根斯坦(Ludwig Wittgenstein，1889～1951)——为了哲学他一生一贫如冼——之后，20世纪再也找不出另外一个能像他这样彻底地献身于抽象科学的人。如果说维特根斯坦抛弃了他的家产作为对自己的一种磨炼，那么埃尔德什舍去他所得的大部分钱财则仅仅是因为他不需要这些钱；如果说维特根斯坦是走火入魔的话，那么埃尔德什先生则仅仅是为了最大限度地获得幸福而编织他的一生。

——《经济学家》杂志

致　谢

本书基本是根据保罗·埃尔德什(Paul Erdős)及其合作者和他们的配偶之回忆写就的纪实作品。没有罗纳德·格雷厄姆(Ronald Graham)的热情帮助,就不会有《数字情种》这本书。他牵线让我认识了埃尔德什的诸多同事,分享了有关埃尔德什的数百封信函和电子邮件,还花了许多时日帮助我理解数学。那些想更多地了解埃尔德什对数学之贡献的人应该读一下格雷厄姆和金芳蓉的最新合著:《埃尔德什与数论——他未解决的问题遗产》。格雷厄姆还给本书提供了埃尔德什的信件和许多照片。我要感谢安德鲁·瓦兹索尼(Andrew Vázsonyi)给我特别讲述早期发生在布达佩斯的那些事。同时还要感谢下列这些人给我讲了有关"保罗大叔"的一些故事,他们是:金芳蓉,安妮·达文波特(Anne Davenport),帕特·佛得里(Pat Faudree),拉尔夫·佛得里(Ralph Faudree),彼得·菲什伯姆(Peter Fishburm),玛格达·弗雷德罗(Magda Fredro),左尔坦·弗勒迪(Zoltán Füredi),罗纳德·古尔德(Ronald Gould),理查德·盖伊(Richard Guy),梅尔文·亨利克森(Melvin Henriksen),迈克尔·雅各布森(Michael Jacobson),卡罗勒·拉康帕涅(Carole Lacampagne),阿伦·迈耶罗维兹(Aaron Meyerowitz),梅尔文·内桑森(Melvyn Nathanson),奇普·奥德曼(Chip Ordman),迈克·普卢默(Mike Plum-

mer)，乔治·帕迪(George Purdy)，布鲁斯·罗思柴尔德(Bruce Rothschild)，迪克·谢尔普(Dick Schelp)，约翰·塞尔弗里奇(John Selfridge)，亚历山大·索伊费尔(Alexander Soifer)，薇拉·索斯(Vera Sós)，乔尔·斯潘塞(Joel Spencer)，玛丽安·斯潘塞(Maryann Spencer)，路易斯·斯特劳斯(Louise Straus)，弗朗索瓦斯·乌拉姆(Françoise Ulam)，劳拉·瓦兹索尼(Laura Vázsonyi)，戴维·威廉森(David Williamson)，赫布·威尔弗(Herb Wilf)和彼得·温克勒(Peter Winkler)。感谢《大西洋》杂志的编辑威廉·惠特沃斯(William Whitworth)和C·迈克尔·柯蒂斯(C. Michael Curtis)委派我来报道保罗·埃尔德什(那是1987年11月)并给我提供经费对他跟踪采访。感谢鲍勃·米勒(Bob Miller)，里克·科特(Rick Kot)和威尔·施瓦尔贝(Will Schwalbe)帮助我把埃尔德什的故事编成了这本书。

图书在版编目(CIP)数据

数字情种:埃尔德什传/(美)霍夫曼(Hoffman,P.)著;米绪军,章晓燕,缪卫东译.—上海:上海科技教育出版社,2000.8

(哲人石丛书·当代科技名家传记系列)

书名原文:The Man Who Loved Onl\ Numbers:The Story of Paul Erdos and the Search for Mathematical Truth

ISBN 7-5428-2373-6

Ⅰ 数…

Ⅱ ①霍… ②米… ③章… ①缪…

Ⅲ 埃尔德什-传记

Ⅳ K835 156.11

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 41898 号

目　录

第 0 章

25 亿岁的老人

Végre nem butulok tovább
(我终于不再愈变愈蠢了)
——保罗·埃尔德什自撰的墓志铭

保罗是一个难得的特殊天才，但是，我相信他很情愿与像我这样一个凡夫俗子一起讨论数学，为此，我会一直感激他。我不会忘记他常在凌晨 4 点的时候遛到我家的过道中，然后走近我的床边问我是不是"脑子敞开"了。我不会忘记他提出来的那些问题和假设，正是这些论题引发了我们之间无所不及、发人深思的谈话。但我最难忘怀的就是保罗这个人。我深深地爱着他。
——汤姆·特罗特(Tom Trotter)

那是 1987 年在新泽西州格林布鲁克的一个寒冷春日的晚饭时分，时年 74 岁的保罗·埃尔德什，与 4 位数学界的同事失散了，而他们就坐在他前面 50 英尺(约 15 米)的地方品尝着绿茶。埃尔德什斜着眼扫视着这家日本小餐馆的餐桌，一条胳膊像稻草人的一只手那样伸向一侧。他正在因为找不着他的朋友而生气。他不该在他们往前走的时候在存衣处耽搁了一会。他开始咳嗽起来，而且胳膊也抖得很厉害。他呼哧呼哧地说："我不明白为什么 SF(Supreme Fascist，即最大的法

西斯分子,天上的头号人物——上帝,他总是折磨埃尔德什,藏起他的眼镜,偷走他的匈牙利护照,或者更糟糕的是把持着各种诡秘的数学题解不放)认为该让我感冒。""SF 创造我们就是为了拿我们的痛苦取乐,"埃尔德什说,"我们死得越早,他的计划就越早落空。"埃尔德什还是找不着他的朋友,但是当他听到正在和父母一起吃饭的一个小孩的尖叫声时,他的怒气全消了——他的胳膊搭拉下来了。"一个 ε!"埃尔德什喊道——他用 ε 代表小孩;在数学里希腊字母 ε(读作"厄普西隆")用来代表小的量。埃尔德什缓缓地走近那个小孩,与其说是凭借自己的目光,不如说是孩子的声音给他引了路。他一边说"你好",一边把手伸进灰鼠皮外套里面掏出一瓶苯齐巨林(一种兴奋剂)。他把瓶子举到齐肩高,然后撒手让它落下来,并立刻用同一只手把它抓住。可这个"ε"一点儿不为所动,但可能是出于礼貌,孩子的父亲却鼓起掌来。埃尔德什把这个把戏重复了好几遍,最后还是由他的一个"老伙计"美国电话电报公司(AT&T)的数学家罗纳德·格雷厄姆(Ronald Graham)给他解了围,他把埃尔德什叫到他的餐桌那儿去,朋友们正在等着他呢。

女招待过来了。埃尔德什逐一询问了长长的菜单上的食品之后,点了道炸鱿鱼丸子。当其他人点菜的时候,埃尔德什把他的餐垫翻了过来,在上面粗略地勾勒出一个小图,模模糊糊有点像穿过呼啦圈的一枚火箭。他的 4 位同餐朋友俯身过来要好好看看这位世界上最富创造力的数学家在玩什么花招。"还有许多边会破坏色数 3……"埃尔德什说道。"这条边毁了这个二部图。"说完,他就闭上眼睛好像睡着了一样。

数学家和其他科学家不一样,不需要实验设备——据说这是从阿基米德(Archimedes)开始的。他从澡盆出来擦了橄榄油之后,用手指甲在油腻的皮肤上勾勒图形而发现了几何

原理。很明显,一家日本餐馆与其他任何一家餐馆一样都是最适合做数学的。数学家需要头脑的冷静,偶尔也需要纸和铅笔。"这就是数学的美,"格雷厄姆说。"你可以躺靠在椅背上,闭着眼睛工作。谁知道保罗正在想什么问题呢?"埃尔德什的一位英国同事的遗孀安妮·达文波特(Anne Davenport)回忆说,"有一次在三一学院,我想大概是在30年代,埃尔德什和我丈夫哈罗德(Harold Davenport)在一个公共场所思考了一个多小时而彼此一言不发。最后,哈罗德说'这不是0,而是1',这才打破了长时间的沉寂。然后就是如释重负、一片欢欣了。他们周围的人都以为他们疯了。的确,他们是疯了。"

■

埃尔德什在1996年9月20日以83岁高龄去世之前,他比历史上任何其他数学家都思考了更多的问题。他独著或与人合著的学术论文达1475篇之多。这些全是颇有价值的文章,其中许多还是不朽之作。他的论著不仅数量惊人,而且质量不凡。埃尔德什说:"有句俗话说 *Non numerantur sed ponderunter*(不是看数,而是称重)。[1] 在古代匈牙利的贵族院选票不是计票数,而是用秤称的。论文也是可以用秤称的。须知,黎曼(Georg Friedrich Bernhard Riemann)的论文目录很短,哥德尔(Kurt Gödel)的目录也不长。当然,高斯(Carl Friedrich Gauss)是个非常多产的作者,欧拉(Leonhard Euler)也是。即使是在埃尔德什70多岁的时候,有好几年他发表的论文还多达50篇,这比大多数优秀数学家一生所写的论文还要多。他证明了数学不只是年轻人的一种游戏。

埃尔德什的生活安排是为了能把他所拥有的时间最大限度地用于数学。他没有妻子和孩子,没有工作,没有嗜好,甚

至没有家——这些都会妨碍他从事数学工作。他的生活行囊就是一只破旧的衣箱和一个在布达佩斯中心商场购买的土黄色塑料包。在永无休止的寻求数学妙题和数学知己的过程中,埃尔德什以疯狂的速度一所大学接着一个数学中心地走遍了各大洲。他通常会在一个数学同事的门阶上出现,宣布"我的大脑敞开了",然后就和这位数学家工作一两天,直到他厌烦了或者他的东道主疲惫不堪为止。这时,他又会去拜访另一家。

埃尔德什的座右铭不是"另一些城市,另一些少女",而是"另一个屋檐,另一个证明"。他在25个以上的不同国家研究过数学,在遥远的地方完成了各种重要的论证,有时还在这些地方不知名的杂志上发表这些论证结果。为此,他的一位同事写了这样一首打油诗:

有一个猜想的确深奥
圆是否是圆的有谁知道
在埃尔德什用库尔德语
写的一篇论文中
一个反例已经找到。[2]

当埃尔德什听到这首打油诗时,他想用库尔德语发表一篇论文,但却找不到库尔德语的数学杂志。

■

埃尔德什从事数学是从3岁时开始的,而在他生命的最后25年内,即自从他母亲去世后,他每天工作19小时,用10到20毫克的苯齐巨林或日他林*、浓咖啡和咖啡因药片来刺

---

* 均为商标名,脑兴奋剂。——译者

激自己。埃尔德什喜欢说的一句话就是："一个数学家就是一台把咖啡转化成数学定理的机器。"当朋友们劝他悠着点时，他总是这样回答："坟墓里有的是休息时间。"

埃尔德什绝不会让任何事物阻碍数学前进的步伐。有一次在新泽西州吃早饭的时候，埃尔德什突然想到加利福尼亚一位同事的名字。他想起了意欲与这位数学家共享的某个数学结果，就朝电话走去并开始拨号。他的东道主打断了他，指出在西海岸，这时才凌晨5点钟。埃尔德什却说："很好，这就意味着他会在家。"

当受到类似这种情况下的劝阻时，大家都知道他会回答说："路易十四说过'朕即国家'，托洛斯基会说'我就是社会'，而我却说'我就是现实'。"知道他的人没人会反驳这一点。一位朋友说："埃尔德什有一种孩子般的天性，要使他的现实取代你的现实。他不是一个容易对付的客人，但我们都希望他在身边——就为他的头脑。我们都把问题攒下来留给他。"

要和埃尔德什交流，就得学习他的语言。数学杂文家马丁·加德纳(Martin Gardner)讲述道："我们见面时他的第一个问题是'你什么时候到的?'我看看表，这时格雷厄姆小声告诉我这是埃尔德什的问话方式，意思是'你是什么时候出生的?'"[3]埃尔德什还常用另外一个方式问这个同样的问题："出生的不幸是什么时候降临在你头上的?"他的语言有一套特殊的词汇，不仅是"SF"和"ε"，还有"老板"(指妇女)、"奴隶"(指男人)、"被俘虏了"(指已婚)、"自由了"(指离婚)、"再次被俘"(指再婚)、"噪声"(指音乐)、"毒药"(指酒精)、"布道"(指进行一次数学讲座)、"山姆"(指美国)、"乔"(指苏联)等。如果埃尔德什说某人"死了"，他的意思是这个人已经停止了数学研究；如果说某人"离去了"，才真正是说这个人死了。

■

埃尔德什身高五英尺半(约1.68米),体重130磅(约59千克),形容枯槁,就像一个瘾君子,但他的朋友则坚持认为远在他使用安非他明之前就身体单薄,弱不禁风。他头发花白,歪七扭八的胡须满脸四散。他通常穿着灰色细条纹夹克衫,深色的裤子,红色或深黄色的衬衫甚至睡衣,拖着一双便鞋或为他的腱力不足的平足而特制的麻麻点点的匈牙利皮鞋。他所有的服装可以都装到一个小衣箱内,并且还可留有足够的余地放他那形状怪异的收音机。他的衣服少得让他的房东不得不一周帮他洗好几次袜子和内衣。"他可以多买些衣服,"他的一位同事说,"或者干脆自己洗衣服。我是说,连傻瓜也能学会用洗衣机。"但问题是只要不是数学,他就懒得麻烦。埃尔德什说:"有位法国社会主义者说过私有财产是窃取之物,而我认为私有财产就是累赘。"

他唯一牵挂的财产就是他的数学笔记本。他一生写满了10本数学笔记,并总是随身带着一本,以便随时记下他的数学灵感。格雷厄姆的一位在美国电话电报公司(AT&T)的同事彼得·温克勒(Peter Winkler)说:"有一次埃尔德什手里拿着笔记本来参加我的一对双胞胎的成人仪式,他还给我的孩子带来了礼物(他喜欢小孩),并且举止得当,但我的岳母还是想把他赶出去。她以为那是哪个破衣烂衫的家伙胳膊下夹着个包就从街上遛进来了。很有可能就在仪式进行的过程中他证明了一两个数学定理。"

他所有的衣服,包括袜子和定做的内衣,都是丝绸的。他的皮肤不知为什么受不了其他面料的刺激。他不喜欢别人碰他,即使你伸出手,他也不会和你握手,而只是软绵绵地拍一拍你的手。与他很亲近的表妹玛格达·弗雷德罗(Magda

Fredro)说:“他讨厌我吻他。他每天洗几十次手,把水弄得到处都是,洗澡间的地板上一塌糊涂。”

尽管埃尔德什避免身体上的亲近,并且总是孑然一身,但他待人友好,乐于助人。“他生存在一张相互信赖的网上。”佛罗里达州大西洋大学的数学家阿伦·迈耶罗维兹(Aaron Meyerowitz)说:“我在读研究生的时候曾经搭载过他。在那以前我们彼此还是陌生人,我不知道怎么走,于是问他是否需要拿一张地图引路。他说不要(很可能他根本就不知道怎么使用地图)。他只是相信我——对他而言还完全是一个陌生人——能把他送到。”

埃尔德什收到的仅有的一些津贴或课酬他都给了亲友、同事、学生甚至陌生人。他每遇见一个无家可归的人,总要给些钱。“20世纪60年代初,当我还是伦敦大学学院的一个学生时,”D·G·拉曼(D.G.Larman)回忆道,“埃尔德什来这儿讲学一年。他第一个月的工资刚发下来就在尤斯顿车站碰上一个乞丐找他要份茶钱。埃尔德什从放工资的口袋里留出支付自己简单生活的少量费用后把剩下的钱都给了乞丐。”[4]1984年,埃尔德什获得数学界最负盛名同时也是奖金最高的沃尔夫奖,他把得到的5万美元的大部分都捐给了他在以色列以他父母的名义设立的一项奖学金。“我留了720美元,”埃尔德什说,“我记得曾有人评论说,对我而言那已是留下了一笔不小的数目。”每当埃尔德什得知一件好事,比如说艰难起步的古典音乐电台、羽翼未丰的美洲土著人运动、走失儿童抚养所,他都会作出一点捐献。“他去世已经一年了,”格雷厄姆说,“而我还在收到接受他捐赠的组织的来信。今天我又收到了来自以色列一位女孩家的一张明信片。”

20世纪80年代末,埃尔德什得知一位名叫格伦·怀特尼(Glen Whitney)的颇有希望的高中学生想到哈佛大学去攻读

数学而差一点学费时,他立即安排与他见了面。当他深信这位年轻人确有天资时,便借给他1 000美元。他请怀特尼只有在不造成经济困难的情况下才还钱。10年后怀特尼总算有了还账的能力。"埃尔德什要不要利息呢?"他问格雷厄姆,"我该怎么做呢?"为此,格雷厄姆问及埃尔德什。"告诉他,"埃尔德什说,"拿那1 000美元去做我当年所做的事。"

■

埃尔德什是一位数学神童。他3岁时便能心算3位数的乘法,4岁时便"发现"了负数。"我告诉我母亲,"他回忆说,"如果你用100减去250,你便得到-150。我的第二个'伟大发现'便是死亡。孩子们从来不认为他们还会死,我也这么认为,直到4岁时。当时我正和母亲逛商店,突然意识到自己错了。我哭了起来,我知道我会死的。从那时起,我总是想再年轻一些。1970年,我在洛杉矶作了一次'我从事数学的前25亿年'的讲演。当我还小时,据说地球已有20亿岁年龄。现在,科学家们说地球有45亿岁。这样一来,我就有25亿岁了。听讲座的学生们画了一条时间曲线,画上我正骑着一条恐龙。有人问我'恐龙是怎么一回事?'后来我一下子知道了答案:'你看,我忘记了,因为一个老人只记得很早时候的事,而恐龙则是昨天才出生的,就在1亿年以前。'"

埃尔德什很喜欢这个恐龙故事,在许多数学讨论中都提到过它。在布达佩斯为埃尔德什举行的一次数学纪念会上,梅尔文·内桑森(Melvyn Nathanson)说道:"他是数学中的鲍勃·霍普(Bob Hope)*[5],会一遍又一遍地重复同样的笑话故事。

* 美国著名戏剧演员,常在电视节目中表演站立喜剧节目 ——译者

如果安排他作一次数学讲座，不管他有多累，只要一被介绍给听众，他就会精力充沛地蹦上讲台开始第一千遍地讲他的例行故事，似乎肾上腺素（或者也许是安非他明）一下子就进入了他的神经系统。”

在20世纪70年代初，埃尔德什开始采用P.G.O.M来代表他的名字，意思是“可怜的伟大的老头”。到他60岁时，就成了P.G.O.M.L.D，“L.D”的意思是“活着的死人”。到65岁时，他变成了P.G.O.M.L.D.A.D，“A.D”的意思是“考古发现”。70岁时，他成了P.G.O.M.L.D.A.D.L.D，最后这个“L.D”的意思是“法定死亡”。到了75岁，他又成了P.G.O.M.L.D.A.D.L.D.C.D，“C.D”的意思是“计数死亡”。1987年他74岁时解释道：“匈牙利科学院有200名成员。当成员满75岁时，还可以留在科学院并享有充分的特权，但已不再计为成员了。这就是‘计数死亡’的含义，但我也许不必面对这一关。他们正在为我的75岁生日筹划一次国际研讨会，也许这就是我的纪念了。我真是老得可怜了，身体也很糟。我不知道我的身体怎么了——可能该一了百了了。”

埃尔德什比他的多数朋友都活得长，令他伤心的是他亲眼目睹了一些朋友变得愚钝起来。他的大学论文导师利奥波特·费耶尔（Leopold Féjer）是匈牙利最负盛名的数学家之一，30岁时便才思耗尽。“他仍然做得很好，但他感到已经没有任何有意义的新思维了，”[6] 埃尔德什说，“他60岁时做了一次前列腺手术，从那以后就无所作为。后来他变得年老体衰，血液循环不适。令人悲哀的是他自己知道自己老了。他自己说过这样的话：‘由于我成了一个完完全全的白痴……’。他一直在医院受到非常好的照料，直到1959年死于中风。”

1976年，当埃尔德什最亲密的朋友、曾与他共同撰写过30多篇论文的保罗·图兰（Paul Turán）去世时，埃尔德什想象

着上帝正用天平衡量着他与同事们的论著。上帝在天平的一端放上埃尔德什与已去世的同事合著的论文,另一端放上他与仍在世的数学家合著的论文。"当与亡者的论著那一端下沉的时候,"埃尔德什说,"我肯定也要死了。"他停了一会,然后又说道:"当然这只是一个玩笑。"

也许吧。几十年来埃尔德什不遗余力地搜寻新的年轻合作者并且多次在结束一天的讨论时说道:"我们明天接着干,如果我还活着的话。"埃尔德什与485名作者合作过,这个数字比历史上任何其他数学家都要多。这485名作者有幸享有的"埃尔德什数"为"1"——这是一个数学界都羡慕的代码,意为与大师本人合作过。如果你的"埃数"为"2",这就意味着你与和埃尔德什合作写过论文的人合作过。如果你的"埃数"是"3",就是说你和埃尔德什的合作者的合作者合作写过论文。爱因斯坦的"埃数"为"2",已知的仍活跃的数学家的最高"埃数"为"7"。从来没写过一篇数学论文的大量"生手"的"埃数"为"∞(无穷大)"。

"几年前有人告诉我我的'埃数'为'7',"[7]1969年,普度大学的卡斯帕·戈夫曼(Caspar Goffman)写道,"但最近我的'埃数'降到3了。去年我在伦敦见到了埃尔德什。当我把我的'埃数'降低了的好消息告诉他时,他遗憾地告诉我,他当天就要离开伦敦了。要不然我的'埃数'也许可以降到最低了。"

由于埃尔德什的去世,除少数几篇即将发表的论文作者以外,"埃数"为"1"的成员俱乐部几乎不可能再有所发展了。"一旦这些论文出版后,"格雷厄姆说,"我们就要仔细检查以确保其中没有滥竽充数者。"那些可能与埃尔德什工作过却没有与他合著论文的人正后悔不迭。"70年代的一个傍晚,"麻省理工学院的数学家吉安—卡罗·罗塔(Gian-Carlo Rota)回忆说,"我向埃尔德什提出我正在研究的一个数值计算问题,他

给了我一个启发，从而最终使问题解决了。在我们论文的引言里我们对他的帮助表示了感谢，但没有把他的名字列入作者之中。为此，我将遗憾终身。我的'埃数'只能是2了。"[8]

数学文献里不乏探讨"埃数"性质的假戏真做的文章。密歇根州罗彻斯特市奥克兰大学的杰罗尔德·格罗斯曼(Jerrold Grossman)建立了一个名为"埃数工程"的国际互联网跟踪"埃数"。[9]埃尔德什的专长之一就是图论。当然数学家所谓的"图"并不是指罗斯·佩罗(Ross Perot)*用在摄像机前的那些图形，而是指通过线段(数学术语为"边")连接起来的各点(即"顶点")。比如说三角形就是一个有三个顶点和三条边的图形。现在我们将代表埃尔德什的485个合作者的485个点画在一张纸上，如果其间的某两位作者又有合著，则一条线将相应的两点相连。这样得到的图形就称为"合作图"，最终数出的边总计有1381条。

埃尔德什的一些同事发表过有关合作图性质的论文，把这个图仿佛看作一个真的数学课题。其中的一篇论文还发现若某两点之间有一条连线，则该图就会有某个特别的性质。为了让"合作图"具有这种性质，这两个素不相识的数学家立即联手证明了一条小定理，并合著了一篇论文。

"我曾就合作图写过一篇论文，"格雷厄姆说，"我曾声称，这篇论文填补了数学中一项极需要保留的空白。可是，如果这个空白有必要保留，我就不该去写那篇论文。"写这种论文有使用笔名的传统。"我用了Tom Odda这个名字。"格雷厄姆说。什么是Tom Odda? "请在秽语词典中查找，"格雷厄姆说，"你会在汉语的诅咒语词条中找到它。Tom Odda的意思

---

* 美国政治家，曾组建"改革党"，并于1992年竞选美国总统，以善于运用图表展示其经济目标著称。——译者

是‘他妈的——’，省略的这个字难听得连秽语词典也不敢写上。”

■

尽管埃尔德什对自己的数学功底充满自信，但一旦离开这个神秘的领域，他就几乎一筹莫展。在他母亲去世后，照看他的责任主要就落在罗纳德·格雷厄姆身上。在20世纪80年代，格雷厄姆处理与埃尔德什有关的事情将近花掉了他与管理AT&T贝尔实验室70位数学家、统计学家和计算机科学家同样的时间。当埃尔德什丢了护照(SF偷了他的护照)时，给华盛顿打电话的就是他。在埃尔德什的最后几年，他说SF的进攻越来越频繁了。格雷厄姆还充当埃尔德什的“财政部长”。由于埃尔德什讲学的课酬从各大洲源源不断地汇来，他不得不成了一位汇率专家。“我以他的名字在支票上签字并帮他把钱存起来，”格雷厄姆说道，“我长年累月这样干，以致我怀疑如果他自己签字的话，银行会不会付钱给他。”

新泽西州默里山上格雷厄姆的老办公室的墙上写着：“不懂数学的人不是真正的人，充其量他只是一个会穿鞋洗澡不把屋子折腾得一团糟的可以忍耐的亚人。”这一段话的附近就是“埃尔德什专用地”—— 一个装着埃尔德什1 000多篇论文的文件柜。“由于埃尔德什没有家，”格雷厄姆说道，“他就把当年他母亲干的活交给了我，让我替他保存论文。他不断地让我把他的一些论文寄给这个那个人。”此外，格雷厄姆还负责埃尔德什的收信工作。这可不是件轻松的事情，因为埃尔德什的不少数学合作都是通过邮件进行的。他一年寄出1 500封信，很少不是讨论数学的。典型的写法如：“我现在在澳大利亚，明天去匈牙利。设 k 为最大的整数以满足……”

格雷厄姆对埃尔德什身体的关心却没有这样有效。“他急需白内障手术，”格雷厄姆说道，“多少年来我一直劝他安排手术，但他怕因此卧床一周而拒绝了。他为了与数学家们合作，连这7天的时间都舍不得。他担心以后年老体衰、脑力不济。”像埃尔德什的所有其他朋友一样，格雷厄姆为他服用兴奋剂的习惯而忧虑。1979年，格雷厄姆与埃尔德什打赌，只要他一个月之内不服用安非他明，格雷厄姆就输给他500美元。埃尔德什接受了这一挑战，马上终止服用兴奋剂并坚持了30天。格雷厄姆交完钱后——他以商务支出的名义开了一张500美元的支票——埃尔德什说道：“你帮我证明了我不是一个瘾君子，但在这段时间内我一无所成。我早晨起来就盯着一张白纸发呆，毫无主意，跟普通人没有什么区别。你因此而使得数学的发展滞后了一个月。”他立即重新服用了兴奋药丸，数学也因此而获益。

1987年，格雷厄姆在新泽西州的沃冲扩建了自己的房子，以便埃尔德什在每年住在那儿的约一个月内能有自己的卧室、浴室和书房。埃尔德什喜欢住在那里是因为那儿还有一位才华出众的数学家，那就是格雷厄姆的妻子，现任宾夕法尼亚大学教授的台湾移民金芳蓉(Fan Chung Graham)。当格雷厄姆不与他共同工作的时候，芳蓉就会与他合作，两人合著了13篇论文，其中最早的一篇发表在1979年。

早在20世纪50年代，埃尔德什就采取订合同的办法来鼓励他的合作者解决他未能解决的问题。到1987年为止，悬赏金额几乎已达15 000美元，具体数额根据他对问题难易程度的判断而定，从10美元到3 000美元不等。“我因此而付出了三四千美元，”那一年他这么说道。“有人问我，假如所有的问题都同时解决了，事情会怎么样？我还支付得起吗？当然不能。但如果所有的储户都同时要求把钱取光的话，哪怕是

世界上资金最雄厚的银行又会怎么样呢？肯定也会破产。事实上前者比后者发生的可能性还要小得多。"自从埃尔德什去世后，格雷厄姆和芳蓉决定负责支付他在图论问题上的奖金，总值超过10 000美元。达拉斯的一位银行家和业余数学家安德鲁·比尔（Andrew Beal）已提出帮助支付其他领域里的埃尔德什问题的奖金。

表面上看来，格雷厄姆和埃尔德什不像一对搭档。尽管格雷厄姆也是世界上最优秀的数学家之一，但他不像埃尔德什那样去拿身体换思维。事实上他致力于将两者都发挥到极点。格雷厄姆身高6英尺2英寸（约1.88米），金黄色的头发，蓝眼睛，脸廓分明得像雕凿出来的一样，看起来至少要比他62岁的年龄年轻10岁。他能一次要6个球，是国际耍球协会的前任主席。他是一个蹦床运动健将，大学时就是马戏团杂技演员。（"蹦床跟耍球是一回事，"格雷厄姆带着一个数学家的归纳倾向说道，"只是你要的只有一件东西，那就是你自己。"）他打保龄球两次得过300分，耍起标枪来令人生畏，并且网球和乒乓球也打得不错。

埃尔德什一坐就是几个小时，而格雷厄姆却老是在动。在解决一个数学问题当中他会突然来一个倒立，抓起碟子就耍起来；或者在他办公室里的超级弹簧单高跷上蹦上蹦下。"无论你在哪儿，你都可以从事数学，"格雷厄姆说，"有一次就在蹦床上三圈后滚翻当中，我获得了解决一个棘手的数学问题的灵感。"

"如果你把格雷厄姆证明的数学定理和他所作的两圈翻滚数目加起来，"他的一个同事这样说过，"他肯定会创造纪录。"事实上格雷厄姆确实保持着一项世界纪录，而且也是这样一个特别的纪录。《吉尼斯世界纪录大全》将他列为在数学证明中用到过最大数字的人。这个数字大得难以想象。数学

家一般都拿宇宙中原子的个数或撒哈拉沙漠中沙粒的数目来比喻某个数有多么大,但格雷厄姆用到的这个数却找不到物质世界中的类似比喻,它甚至不能用一般的数学表达法来表达,例如说是"1"的后面加上亿万个"0"。为了引用这个数,必须采用一种特殊的表达法,即指数摞指数形成一个庞大的数字斜塔。

除了在数学和杂技上处于世界领先水平以外,格雷厄姆还花时间学习中文和弹钢琴。就连他的妻子和同事们都无法理解他是怎么做到的,而格雷厄姆却说:"很简单,每个星期都有 168 个小时。"

埃尔德什和格雷厄姆是 1963 年在科罗拉多州博尔德召开的一次关于数论的研讨会上认识的,从此两人立即开始了合作,总共发表了 27 篇论文并合著了一本书。那次会晤也是两个人之间许多次体育较量的第一次。"我记得刚见到他时我想这家伙有点老了。"格雷厄姆说,"但是他竟然在乒乓球上打败了我。那次失败让我开始认真地对待这项运动。"格雷厄姆买了一台高速发球机进行乒乓球训练,进而成了贝尔实验室的乒乓球冠军。直到埃尔德什都 80 多岁了,两人还偶尔玩一玩。"保罗喜欢挑战,"格雷厄姆说,"有时我让他 19 分后坐着跟他玩,但他的视力实在太差了,我只需把球挑得高高的,他就会碰不着球。"

在埃尔德什的晚年,他找到了新的体育比赛项目。尽管他照例会输,但毕竟在这些项目里,他赢的机会似乎会大一些。"保罗挺会想招儿,"格雷厄姆说,"比方说他会提出我爬楼的速度有没有他的两倍。我们决定试试看。我们在亚特兰大的一个宾馆里比赛爬 20 级楼梯,并使用秒表计时。当他气喘吁吁地到达目标时,我按下秒表,但一失手把时间给消掉了。我告诉他我们只得再赛一次,'谁还跟你比!'他嘟囔了一

句，然后气喘吁吁地走了。”

“还有一次是在纽瓦克机场，埃尔德什问我沿着下行的扶梯往上跑难不难，我说没问题并示范了一次。‘比我想象的要难，’我告诉他，而他却说：‘看起来并不难。’我说：‘我敢肯定你办不到。’‘笑话！’他说，‘我当然能办到。’埃尔德什大概往上跑了四步就面朝地摔了一跟头，并一直滑到扶梯底部。人们都看着他，而当时他穿着一件破外衣，活像一个穷酒鬼。后来谈起这事他还很恼怒。‘当时我头晕了。’他说。”

埃尔德什和格雷厄姆就像一对老夫妻，快快乐乐却又争吵不休，遵循着外人弄不懂的规矩。这些规矩许多是有关食品的。当埃尔德什身体感觉不错时，他会5点钟起床并开始四处折腾。他想让格雷厄姆给他做早餐，而格雷厄姆却认为他该自己做。埃尔德什喜欢吃葡萄柚，当格雷厄姆知道他要来时就把葡萄柚塞满了冰箱。在1987年春天一次来访时，埃尔德什就像往常一样往冰箱里一瞅，看到了葡萄柚。事实上，两人都明白对方知道冰箱里有葡萄柚。

“有葡萄柚吗?”埃尔德什问道。

“不知道。”格雷厄姆回答说，“你找了没有?”

“我不知道往哪里找。”

“冰箱里怎么样?”

“冰箱里什么地方?”

“哎，找找看呗。”

埃尔德什找到了葡萄柚。他看了又看，然后拿了一把切黄油的刀。“即使是偶然的，也不能这么巧。”格雷厄姆说道，“埃尔德什老是用刀背拼命往里切。葡萄柚汁液四溅，他自己身上和厨房里到处都是。我跟他说：‘保罗，你不觉得该用锋利一点的刀吗?’他看着汁液满屋乱溅，却说：‘不碍事。’这时候我只好作罢，自己起来帮他切。”

不得不忍受埃尔德什在厨房的古怪行为的不只是格雷厄姆一个人。"有一次我跟保罗在一起呆了几天,"同是匈牙利移民过来的雅诺什·帕克(János Pach)说道,"晚上我进入厨房时,被眼前的景象吓了一跳。地上是一摊一摊血红色的汁液,流痕一直拖到冰箱。我打开冰箱,让我惊异的是我看到一盒番茄酱横躺在里面,边上豁开一个大口子。保罗一定是渴了,想了想,然后拿了一把大刀子来捅开这盒番茄酱。"[10]

在数学上,强烈的好奇心是埃尔德什的风格。他把这种风格也带进了他所碰到的其他事物。他乐于问最基本的问题,用怀疑的态度来思考别人想当然的一些事情。他在数学上的成功,部分地归功于他这种精神。在数学以外,他也问一些基本的问题,但他从来就不记答案,因此老是一遍又一遍地问同样的问题。他会指着一碗米饭,问那是什么,是怎么做的。这时格雷厄姆就会假装不知道,餐桌上其他人就会耐心地告诉他。但隔了一两顿饭以后,埃尔德什看到餐桌上的米饭时又会问同样的问题,好像他从来没见过米饭一样。

埃尔德什对食品的兴趣,就像他对其他许多事物一样,只存在于理论上。他从来就没有尝试过自己煮饭。事实上他从来就没有烧过任何东西,甚至连泡茶的开水都没烧过。"我能做很好的凉麦,"他说,"也许我还能煮鸡蛋。但我从来就没有试过。"他第一次给面包片抹黄油是在 21 岁,在那以前都是他母亲或是他家的佣人给他抹的。"我清楚地记得,"他说,"那一次我刚去英国学习,茶点的时候上了面包。要是承认自己从来没有抹过黄油,那太让我难堪了,于是我就试了试。还不是太难。"就在 10 年前,当他 11 岁的时候,他第一次给自己系了鞋带。

他对开车的兴趣在数学界里广为流传,尽管你从来就看不到他自己开车。他没有驾照,交通问题靠朋友网络——称

为"保罗叔叔保姆队"——来解决。但他总是问他现在在什么街上并怀疑走的路对不对。"他并不是神经质,"格雷厄姆解释说,"他只是想知道。有一次他坐在保罗·图兰的遗孀薇拉·索斯(Vera Sós)的车上。她刚学会开车,但他还是照例问他的问题:'走这条路行吗?''走那条路如何?''我们是不是该走那边?'薇拉一分心,一下撞到一辆时速四五十英里(约七八十千米)的小汽车边上。她把那辆车给撞毁了,并发誓再也不带埃尔德什了。"

但在数学之外,埃尔德什的兴趣仅限于衣食住行而已。他没有时间花在诸如性、艺术、小说、电影等这些"无聊"的事情上。埃尔德什最后一次看小说是在20世纪40年代,最后一次看电影好像是在50年代。那是一部关于在南斯拉夫诺维萨德所发生的一起暴行的电影,名叫《寒冷的日子》,在那里匈牙利人残忍地淹死了几千犹太人和俄罗斯人。偶尔他的数学同事们会硬拉着他跟他们的家庭一起参加一些非数学的活动,但埃尔德什跟他们呆在一起也是心不在焉。"有一次我带他去约翰逊航天中心看火箭,"他的一位同事回忆说,"但他甚至连头都没抬。"还有一位数学家曾经带他去看哑剧,但表演还没开始他就睡着了。梅尔文·内桑森的妻子是纽约现代艺术博物馆的一位主任。有一次他拉着埃尔德什去参观那个博物馆。"我们带他看马蒂斯(Matisse)* 的画展,"内桑森说,"但他表现得漠不关心。几分钟后我们又坐在雕塑广场搞起数学来了。"

---

* 20世纪法国最优秀的画家之一。——译者

第 1 章
来自天书

我曾渴望读懂人们的心窝。
我曾渴望知道星星为什么闪烁。
我曾试图了解毕达哥拉斯的神力,
有了它,数字不再摇曳不定。

——伯特兰·罗素(Bertrand Russell)

数学家的模式,就像画家或诗人的模式一样,一定是充满美感的;数学的概念,就像画家的颜色或诗人的文字一样,一定会和谐地组合在一起。美感是首要的试金石:丑陋的数学在世界上是站不住脚的……数学的美一定很难定义,但其他任何领域的美又何尝不是如此——我们可能并不清楚说一首诗很美究竟意味着什么,但这并不妨碍我们阅读并认同它。

——G.H.哈代(G.H.Hardy)

埃尔德什是一位数学的苦行僧。他放弃了尘世的享乐和物质追求而去过一种殚精竭虑的苦行僧式的生活,他把他的一生都奉献给了一项专一的事业,那就是发现数学真理。究竟是什么使得数学能让人如此陶醉而又如此憔悴呢?

“人们早就争论,”埃尔德什说过,“究竟是我们创造了数学还是仅仅发现了她。换句话说,数学真理是否已经存在在

那里，尽管我们还没认识到。如果你相信上帝，那么答案是不言而喻的。数学真理本来就在 SF 的脑袋里，我们只是重新发现了它。请记住下面这首打油诗：

个年轻人感叹：'啊，上帝，
此事真让我诧异，
枫树将不复存在——
如果没人在院子里。'

'先生，您的感叹真稀奇，
因为我一直存在于院子里。
树的存在
毋庸置疑，
因为看着它的有
您忠实的上帝。'"

"我不便说上帝是否存在。"埃尔德什说，"我有些怀疑上帝的存在，但我总是认为 SF 就有这本'超穷'的'天书'——超穷是一个数学概念，它比无穷还要大，这本天书里有所有数学定理的最好、最漂亮、最完美的证明。"埃尔德什给同事的工作的最高赞赏就是："这就是天书上的。"

"有一次在埃尔德什演讲前我向观众介绍他时，"1970 年开始与埃尔德什合作的纽约大学库朗数学研究所的数学家乔尔·斯潘塞(Joel Spencer)说，"我开始谈及他有关 SF 和'天书'的观念。他打断我的介绍说：'你可以不相信 SF，但你应该相信那本'天书'。'埃尔德什让我和我的同事们了解了我们工作的重要性。数学就在那里，她充满了美感，而这正是我们发掘的珍宝。"

数学真是珍宝？对于那些从小劳神费力去背诵乘法表，长大了还得请人帮忙填报所得税表的人来说这确实让人诧异。数学是一门被误解甚至被诽谤了的学科，她既不是我们

在学校里被灌输到脑子里的缺乏人情味的数字计算,也不是猜测的学问。数学家并不是在花时间思考怎样乘得巧妙、怎样加得更快或者是寻找求立方根的更好的办法。

■

我上小学时认为数学就是毫无人情味的数字计算——虽然我承认我喜欢计算,因为那是我的强项。我们的数学老师会让班上的两位同学站起来,然后出一道数学题看谁心算得更快。先说出正确答案的同学继续站着,输的一方坐下来。接着另一位挑战者又站起来,然后老师再出另外一道题,就这样直到班上的所有同学都轮到为止——而我经常就是那个能一直站下去的学生。(可是到初中时我的兴趣却转到另外一项跟数学一样规则严明的活动上来,那就是国际象棋。我白天黑夜地跟别人甚至跟自己玩,一着迷就是几年,其程度不亚于埃尔德什对数学的痴迷——我在梦中还一盘一盘地下,但遗憾的是我的成就却无法和埃尔德什媲美。)

我大学毕业后的第一份工作是在《科学美国人》编辑部,在一段短短的时间里做过马丁·加德纳著名的"数学游戏"专栏的编辑工作。加德纳有点像一位隐士,他很少到办公室来,但从他的著作中我明白了数学远不只是算术。我记得为他的"有比'无穷'还要大的数"的奇特观念所吸引。1980年我通过《科学美国人》认识了罗纳德·格雷厄姆,几年后又通过格雷厄姆结识了埃尔德什。他们对数学的奉献具有感染力,他们研究数学的方式也是对"孤僻的天才"这一成见的否定。他们中谁也不把自己关在发霉的书房以便远离尘世去证明或猜想。对于埃尔德什和格雷厄姆来说,数学是一项集体活动。我见过他们激烈争论数学问题,就像目睹他们为葡萄柚的事

而争吵一样。

为了弄清他们的世界,我曾找出过"埃数"为1的人,跟他们的夫人聊过,甚至还在格雷厄姆住所里埃尔德什的房间里睡过(我不清楚当时我期望得到什么,这一经历对提高我的数学能力并没有什么作用)。我沉浸在数学史的思维中,研究毕达哥拉斯(Pythagoras)、牛顿(Isaac Newton)、费马(Pierre de Fermat)、高斯、希尔伯特(David Hılbert)、爱因斯坦(Albert Eınsteın)和哥德尔,研读数学回忆录和埃尔德什的信函,窥探他那孤独的行李箱并在10年内的不同时期与他本人交谈过。我逐渐喜欢上他,为他那些傻气的俏皮话而发笑,并开始理解为什么他把数学看成是对永恒的美和终极真理的探索。我了解到,即使20世纪的几次政治大动荡(匈牙利的共产主义革命、欧洲法西斯和反犹太主义的兴起、第二次世界大战、冷战、麦卡锡主义)使他生活飘摇的时候,他也没有放弃过对数学的探索。在他认为残忍、冷酷的这个世界里(尽管他相信大众的善良和无辜),数学是他的依靠。"生活的游戏,"埃尔德什常说,"就是让SF得分最少。如果你一生干了坏事,SF就得了2分;如果你没干你应该干的好事,SF就得了1分;如果你总不得分,那末SF就总是赢。"但他又强调说,生活的目的就在于证明和猜想,"要想永垂不朽,数学是最佳的路径。如果你作出一个重大的数学发现,那即使所有别的人都被遗忘,你也会被人们牢记。"[1]

■

对于数学的研究范围,即使在那些从事数学的人里面,也有人有过误解。"即使在我知道什么是数学家之前,"斯潘塞说,"我就一直想成为一个数学家。我父亲是一个注册会计

师，我也喜欢数字。我认为数学就是把长串长串的数字加起来。直到上高中时我才真正知道数学是什么。要是我把长串的数字相加并以此为生的话，毫无疑问我现在要富得多。”

现任教于纽约大学的几何学家雅诺什·帕克记得，20世纪50年代末当他还小的时候看到他的姨妈薇拉·索斯和保罗·图兰在匈牙利科学院的宾馆与埃尔德什一起工作。“当大人们去散步、打乒乓球或去喝咖啡的时候，他们工作的地方就静下来了。我溜到桌边去看一眼‘高等数学’——那些散满桌面的笔记。我惊奇地发现他们工作的最终产品竟是这些东西：稀奇古怪的字母、数字、符号、箭头，简直就是鬼画符。我确信宇宙的法则就是用这些神秘的语言写成的。要不然，这些又聪明、又有名望的人怎么会如此热衷于这些数学问题！”[2]就是这些成功的大人们的潇洒把帕克也拉进了数学。他们“周游世界，从北京到卡尔加里到各个重要的大学讲学。他们生活时髦，穿优质粗花呢夹克，听袖珍收音机，他们的鞋竟然没有鞋带！这些自然逃不过一个孩子的眼睛。”

但对于埃尔德什的表妹玛格达·弗雷德罗来说，这些似乎没有多大作用。尽管他们的相识时间不啻埃尔德什的大半生，而且她还陪着他从佛罗里达到以色列到处进行数学演讲，但对于埃尔德什所从事的事业她却一无所知。“请问这本书写的是什么？”她翻看着埃尔德什写的《计算的艺术》问我，“简直就像汉语一样。哎，埃尔德什究竟有多大的声望和智慧？我可对此一点也不知道。有一次他一连查出6个电话号码，等我们走了半个小时之后，他凭着记忆把这6个号码都拨了出去。这件事比他所有的科学工作留给我的印象都更深刻。”

数学以它的抽象和严守规则常常被类比为下棋。两者都需要参与者的注意力高度集中，抛开身边的事物密切注意眼

下严谨的规则，此外还需要有一种必胜的信念。“对于创造性科学来说不折不挠是至关重要的，”[3] 波兰籍数学家斯坦尼斯拉夫·乌拉姆(Stanislaw Ulam)说过，“乐观主义者比悲观主义者更乐于做更多的尝试。下棋也不外乎这一规律。下棋高手倾向于相信(尽管有时这种自信是错误的)，自己占有优势，这样才有助于把棋下下去。相反，怀疑自己则更容易导致疲劳。”

然而，数学与下棋的类比也仅此而已。“下棋确确实实是一个数学问题，但从某种意义上来说却是一个微不足道的数学问题。”数论专家哈代在他的经典之作《一个数学家的自白》一书中写道：“下棋的问题不管有多么巧妙和复杂，也不管棋着是多么独到和出人意料，却缺少一样最本质的东西：它并不重要。最好的数学既是严肃的，又能给人以美感。”[4] 需要强调的是“从来没有什么下棋的问题影响过科学思维的进程，而毕达哥拉斯、牛顿和爱因斯坦都分别在他们不同的时代改变了科学思维的方向。”[5]

对于埃尔德什、格雷厄姆和他们的同事们来说，数学是最完全的秩序和最纯朴的美，其秩序超过现实的物质世界。当公元前 3 世纪的希腊几何学家欧几里得(Euclid)提到“点”和“线”时，他指的是理想化的实体，是没有尺度的“点”和没有宽度的“线”。现实世界(譬如说物理或工程)中存在的所有的“点”和“线”都有尺度，因而都只是几何学家所构造的“点”和“线”的不完美的代表而已。只有在这个理想化的世界里任意三角形的三个内角之和才正好等于 180 度。

数字也同样具有超现实的性质。比如说素数，也就是像 2,3,5,7,11,13,17 这些只能被它本身和 1 整除的数。我们每个人碰巧都有 10 个手指，因而我们的计数系统也就很方便地建立在十进制的基础上。但对于其他任何计数系统，也存在

具有同样性质的素数。如果我们有 26 个手指并相应构造我们的计数系统，那时仍将有素数存在。素数的普遍存在是卡尔·萨根(Carl Sagan)的小说《接触》一书的关键。在这本小说里，外星人(天知道他们有几个手指!)向地球人发送脉冲数目为素数的无线电信号。但设想一种不使用十进制的文化，并不需要借助于小绿人。* 我们地球上就不乏此例。计算机使用的是二进制，而古巴比伦人有一种 60 进制的计数系统。后者的影响从我们计量时间的方式中还可看到(60 秒为 1 分钟，60 分钟为 1 小时)。这种 60 进制虽然麻烦，但它同样具有自己的素数。八进制也是如此。18 世纪威廉和玛丽学院的数学家休·琼斯(Hugh Jones)牧师就因为妇女在厨房跟 8 的倍数打交道(1 夸脱等于 32 盎司，1 磅等于 16 盎司)而认为妇女使用八进制比使用十进制更为自然。[6]

哈代相信数字是构成宇宙的经纬。他在 1922 年跟一群物理学家讲学时提出一个发人深思的说法，即数学家"才与现实最为接近。这似乎让人费解，因为研究通常被认为是'现实'的物质世界的正是物理学家"。但"一把椅子或一颗恒星却一点也不像它表面的样子，我们考虑得越多，在围绕这些物体的感觉的光环里，它的轮廓就越模糊。而'2'或'317'却与感觉毫无关系，我们审视得越深，它的性质就变得越清楚……317 是一个素数，并不是因我们认为它如此或因我们特殊的思维模式所致，而是因为它本来就是这样。数学真理就是这样建立的。"[7]

素数类似原子，它是构成所有整数的基石。每一个整数要么它本身就是素数，要么是若干个素数的乘积。例如，11 是素数，12 是素数 2、2、3 的乘积，13 是素数，14 是素数 2 和 7

* 人们设想的天外来客。——译者

的乘积,15 是素数 3 和 5 的乘积等等。约在 2300 年以前,欧几里得在其《原理》第 9 卷的命题 20 中"以'天书'的巧妙方法"证明了素数是无穷无尽的。

[欧几里得写道,假设素数的数量有限,那么这些素数中总有一个最大,设该数为 P。现在考虑一个比 P 大的数 Q,设 Q 等于从 2 到 P 的连续整数之积再加上 1,即 $Q=(2\times3\times4\times\cdots\times P)+1$。从 Q 的表达式中可以看出数 Q 不能被从 2 到 P 的任何整数整除,因为相除的结果总有余数 1。如果 Q 不是素数,那么它必然能被某个比 P 大的素数整除。另一方面,如果 Q 是素数,则 Q 本身就是一个比 P 大的素数。以上两者的任何一种情况都说明存在一个比假定的最大素数 P 更大的素数,也就是说"最大素数"的假设是不成立的。反过来,如果不存在一个最大素数,那就说明素数是无穷无尽的。埃德娜·圣·文森特·米莱(Edna St. Vincent Millay)写道:"只有欧几里得看到了'美'的本质。"]

到本书完稿时为止,已知的最大素数是一个 909 526 位数,它等于 2 的 3 021 377 次方减去 1。该素数是 1998 年 1 月 27 日由因特网梅森素数大搜索计划(GIMPS)找到的。[8] 在这个计划里,4000 个素数搜寻小组通过互联网的通信将他们的计算机联起来进行搜索,每台计算机负责检查一个数段。加利福尼亚州立大学多明格斯希尔斯分校 19 岁的二年级学生罗兰·克拉克森(Roland Clarksen)较为幸运,他用他那 200 兆赫奔腾处理器 PC 机经过 46 天的断续运算后,在他所分派的数段内证明了整数 $2^{3\,021\,377}-1$ 是一个素数。

对大素数的寻找由来已久。早在 17 世纪,巴黎的僧侣马林·梅森(Marin Mersenne)就从他的僧职工作中抽时间来寻找素数。像 $2^{3\,021\,377}-1$ 这样可表示为 2^n-1 的数被称为梅森数。梅森数为素数的必要条件是 n 本身必须是素数,因此,

由于 $2^{3\,021\,377}-1$ 是一个素数,3 021 377 必然也是素数。但 n 是素数并不能保证相应的梅森数也是素数。当 n 取前几个素数时相应的梅森数确实是素数:

$$n=2,\quad 2^2-1=3$$

$$n=3,\quad 2^3-1=7$$

$$n=5,\quad 2^5-1=31$$

$$n=7,\quad 2^7-1=127$$

但当 n 等于第 5 个素数即 11 时,相应的梅森数却是合数($2^{11}-1=2\,047$,其素因子为 23 和 89)。1644 年,梅森本人也断言当 n 取第 6、第 7 或第 8 个素数即 13、17 或 19 时,相应的梅森数 $2^{13}-1$(或 8 191),$2^{17}-1$(或 131 071)和 $2^{19}-1$(524 287)都是素数。他的断言是对的。

这位僧侣还大胆断言 $2^{67}-1$ 是素数,并在其后的 250 年内未引起争议。后来在 1903 年,哥伦比亚大学的弗兰克·纳尔逊·科尔(Frank Nelson Cole)以一个不醒目的标题"论大数的因式分解"在美国数学会的一次会议上作了一篇报告。"科尔——一个一向很少言辞的人——走上讲台,一言不发就开始在黑板上计算起 2^{67}来,"[9] 据当时在场的埃里克·坦普尔·贝尔(Eric Temple Bell)回忆说,"然后他小心地将该数减去 1,得到了 147 573 952 589 676 412 927 这个天文数字。接着他又一声不响地换到黑板上一块干净的地方,列出算式计算出下列两数的乘积:即

193 707 721 × 761 838 257 287。"

"两次计算的结果相符。梅森猜想——如果可以这么称呼的话——作为一个数学神话顷刻间烟消云散。有史以来美国数学会的听众第一次向一位在会上宣布论文的作者热烈鼓掌。科尔默默回到了自己的座位上,也没有人向他提问。"

像梅森表达式 2^n-1 那样,没有一个式子的结果肯定是

素数，因此，素数让人难以捉摸。GIMPS计划所使用的方法并不比已有2000年历史的埃拉托色尼筛法复杂到哪儿去。后者的发明者是亚历山大的埃拉托色尼(Eratosthenes)，据说他无论干什么事，从几何学到歌剧，总是至少得第二名，因此得了一个"β"的绰号。筛法的原理很简单：从2开始列出连续的正整数，然后去掉第一个素数2的所有倍数，接着又去掉下一个素数3的倍数，接着再去掉下一个素数5的倍数……这样，每筛选一次就得到一个新的素数。

对于历代数学家来说，素数都好像具有魔力一般。"我认识一位数学家竟然只在素数日子里跟他妻子睡在一起。"格雷厄姆说，"这在月初还好——2，3，5，7——但到月底就不同了，这时素数就稀少了：19，23，然后是一个大空档直到29。可是这伙计疯了。现在他因绑架和谋杀未遂罪在俄勒冈州立监狱服20年的徒刑。"

素数看起来很简单，但其性质很难把握，这也是它耐人寻味的原因。有关素数的各种基本问题还悬而未决，尽管一代代敏锐的数学家都曾仔细研究过这些问题。例如，克里斯蒂安·哥德巴赫(Christian Goldbach)于1742年推测每一个大于2的偶数都是两个素数之和：

$$4=2+2$$
$$6=3+3$$
$$8=5+3$$
$$10=5+5$$
$$12=7+5$$
$$14=7+7$$

如此等等。

"事实上笛卡儿(René Descartes)在哥德巴赫之前就发现了这一规律，"埃尔德什说，"但把它命名为哥德巴赫猜想更

好，因为在数学成就上笛卡儿富庶无比而哥德巴赫则一贫如洗。”20世纪的数学家们借助于计算机，已经证明1亿以下的所有偶数都可表示为两个素数之和，但他们还是未能证明哥德巴赫的这一猜想可以无限延伸下去。与此类似，计算机已经搜索出无数的“孪生素数”，即两个连续的奇数都是素数，像3和5，5和7，11和13，71和73，1 000 000 000 061和1 000 000 000 063等。数论家相信孪生素数就像素数本身一样是无穷无尽的，但还没有人能证明这一点。在更深一些的层次上，还没有人找到一种简易方法以预测一个素数与下一个素数之间相差多少。

对于20世纪80年代曾被囚禁在伊朗达数年之久的记者罗杰·库珀(Roger Cooper)来说，素数之间的差值还无定规可循这一点给了他不少慰藉：“由于我否认自己是英国间谍，因而经常被蒙住眼睛遭受拳打脚踢的审讯。在这些审讯的间隔，在没有书的情况下我只能想些办法聊以自娱。我用面包屑子做了一副15子棋，并根据罗马数字自创了一套计数方法，只是用苹果籽代替‘0’，橘子籽代表‘1’，李子核代表‘5’，十位和百位则以位置来定。这样我竟能计算出5 000以内的所有素数(我把它们记在门背后的死角)并以此来推测它们的出现有什么特点。”[10]

■

素数是埃尔德什的亲密朋友，他在素数方面的渊博知识无人可比。“当我10岁的时候，”埃尔德什说，“我父亲把欧几里得的证明教给我，我就入了迷。”10年后，即在他上大学一年级的时候，他用简明的方法证明了在任何大于1的整数 n 和 $2n$ 之间总可以找到一个素数，从而轰动了匈牙利数学界。

这一规律大约在1850年时就已经被俄国数学奠基人之一的P.L.切比雪夫(Pafnuty Lvovitch Chebyshev)证明过,但切比雪夫的证明太累赘,不可能是"天书"的手笔。同样是移栽一枝蔷薇,切比雪夫用的是蒸汽铲车,而埃尔德什只用汤勺就办到了。年轻的埃尔德什的胜利通过这支小调传遍了英语国家:

切比雪夫说过,我再说一遍

在 n 和 $2n$ 之间总有一个素数存在

1939年,埃尔德什在普林斯顿听过后来对第二次世界大战时期美国雷达开发作过贡献的美籍波兰数学物理学家马克·卡克(Mark Kac)的一次报告。"在我报告的大部分时间内他都快要睡着了,"卡克回忆说,"报告的内容跟他的兴趣毫不沾边。在将近结尾时我大致说了一下我在素因子方面遇到的困难。一提起数论,埃尔德什马上就精神起来,让我再解释一下到底困难在哪。不到几分钟,报告还没结束,埃尔德什就打断我的讲话并宣布问题解决了!"[11]

埃尔德什对素数问题的洞察力异常敏锐,每当听到有关素数的一个新问题时,他经常很快就超过那些为此耗费了大量时间的人。理查德·贝尔曼(Richard Bellman)在他的自传《飓风之眼》中讲述了他和哈尔·夏皮罗(Hal Shapiro)在确定两个数互素(即它们没有大于1的公因数)的可能性这一问题上的经历。他们把有关这一工作的初稿寄给了《美国数学会会报》。"很不幸,编辑A.A.艾伯特(A.A.Albert)去了巴西而且要在那儿呆半年,会报的工作交给了卡普兰斯基(Kaplansky)。我们的论文得到审稿人埃尔德什的首肯,但卡普兰斯基又问埃尔德什是否有比我们的方法更好的证明。埃尔德什给了他一个,他又把它传给了我们。我们回信指出要是埃尔德什的证明写得跟我们的一样详尽的话那也短不了。在卡普兰斯基的坚持下埃尔德什又提供了一个更简洁的证明。因此,卡普

兰斯基建议我们和埃尔德什合写一篇论文,但我们拒绝了这一建议,只是说如果埃尔德什愿意的话我们可以把他的论文作为附录加上。"

贝尔曼回忆说,僵局持续了一个月,直到有一天"夏皮罗忧心忡忡地找到我。他参加了各种会议,感到好像埃尔德什在四处说我们偷了他的成果"。于是,夏皮罗和贝尔曼就写信给卡普兰斯基撤回了论文。[12]几周后他们收到了卡普兰斯基的一封信,说是因此而毁了版,要求他们支付300美元的制版费,但遭到夏皮罗和贝尔曼的拒绝。此时,艾伯特已经回来了,他给贝尔曼和夏皮罗写了一封"措词严厉"的信,威胁他们说要是他们不付钱的话就将他们赶出美国数学会。"我常常想象我们的'驱逐仪式'。"贝尔曼写道,"我想我们会气得将铅笔都折断的。"

此时,贝尔曼求助于莱夫谢茨(Lefschetz),并有力地指出审稿人的工作应该是判断成果的真伪和重要性,而不是作进一步的提高。莱夫谢茨不顾事情的微妙之处"给艾伯特写了一封信指出他年轻鲁莽之处",使得艾伯特体面地下了台阶。结果,不管是贝尔曼和夏皮罗的论文还是埃尔德什的证明都没能发表。就像贝尔曼说的那样,"事情闹得很可惜,因为埃尔德什的证明方法确实很好"。

1949年埃尔德什取得了对素数问题的一个伟大胜利,只是由于事情颇有争议以致他对此避而不谈。虽然数学家们无法确切指出素数的位置,但早在18世纪末,他们就知道一个描述素数统计分布的公式来表明素数变得越来越稀少的平均规律。为了寻找这一公式,可以称得上是历史上最伟大的数学家的卡尔·弗雷德里克·高斯在1792年年仅15岁时即着手研究素数表。到1796年,约翰娜·海因里希·兰伯特(Johann Heinrich Lambert)和乔治·冯·维加(Georg von Vega)发表了

400 031以内的所有素数表,此后不久其他研究者们将素数表扩展到了数百万。高斯的工作进展缓慢,原因是他从不盲目接受已发表的结果,而是对这些数进行加倍的核对。他的工作成效卓著,发现这些结果中存在大量的错误。"我没有耐心系统地检查整个素数表,"他在给天文学家约翰娜·弗朗兹·恩克(Johann Franz Encke)的信中写道,"于是我便利用零碎时间一千个一千个地检查。最后我彻底放弃了,连100万以内的检查都一直没有完成……兰伯特的增补表里101 000~102 000之间的素数表就错误不断,我删掉了其中不是素数的7个数,进而又加进了2个漏掉的素数。"[13]确定素数的繁琐工作促使高斯提出了预测素数分布的第一个公式。尽管该公式和长长的素数表相符,但高斯一直没有证明他的"素数定理"是否普遍适用。直到一个世纪以后雅克·阿达马(Jacques Hadamard)和查理·德拉瓦莱·普森(Charles de là Vallée Poussin)才给出一个证明。

就像切比雪夫的证明一样,1896年的这个证明依赖于庞大的机器计算,当时连最敏锐的数学头脑都相信"素数定理"的证明非此莫属。但埃尔德什和他的一个当时还默默无闻的同事阿特利·西尔伯格(Atle Selberg)却提出了一个"初等的"证明,从而让数学界大吃一惊。据埃尔德什的朋友讲,两人商定要在一本主流杂志上发表专刊讲述各自对这一证明的贡献。于是,埃尔德什就向数学家们寄发邮卡告知他和西尔伯格已经征服了素数定理。有一次,西尔伯格碰上一位陌生的数学家,他显然已经收到埃尔德什的邮卡。这位数学家开口就说:"你知道吗?埃尔德什和——和谁来着?——用初等方法证明了素数定理。"据说,西尔伯格伤心透了,便抢先独自发表了论文,并因此而享有该成果的绝大部分权益。1950年西尔伯格一人主要因为在素数定理方面的工作,获得了在数学

界最可与诺贝尔奖媲美的菲尔兹奖。

数学界的成果优先权之争并不少见。跟其他领域的科学家不一样,数学家没有任何试验结果的痕迹来证明各自的工作。事实上,埃尔德什花了大量时间来调解他最密切的合作者之间的优先权之争。乔尔·斯潘塞说:"我原以为只有三流数学家才会卷入这种争论,但事实上他们是一流的数学家,是那些对数学充满激情的人。"要是他们猜不出"天书"中的解答,他们也不希望别人能办到。得克萨斯州的一位已故卓越数学家 R.L.摩尔(R.L.Moore)就直言不讳:"如果我想不出某一个定理,我也不愿别人想到。"

在与同事共享数学思维方面,埃尔德什表现出罕有的坦荡襟怀。"他愿意与别人分享他的数学猜想,因为他的目的不是为了让自己第一个去证明它。"曾和埃尔德什合著过两篇论文的亚历山大·索伊菲(Alexander Soifer)说,"他的目的是有人能使问题得到解决——有他也好,没他也好。保罗是独一无二的流浪的犹太人。他周游世界,把他的猜想和真知灼见与其他数学家分享。"

"埃尔德什对数学做出了巨大贡献。"卡尔加里大学的数论家理查德·盖伊(Richard Guy)回忆说,"但我认为他更大的贡献在于他造就了大量的数学家。他是最优秀的提问者,他有提各种难度的问题的非凡能力。很多人都能提问题,但要么是难得高不可攀,要么是容易得微不足道。在'微不足道'和'高不可攀'之间的小径上只有很少数人能行走自如。埃尔德什的问题问得适中,它们不是花上半个世纪才得以解决的希尔伯特问题。当我们在研究中陷于迷惘的时候,很有可能就是因为我们问的问题不合适。埃尔德什问的大量问题一直是很独特而又很重要的,而大多数问题都得到了研究并且被部分或全部地解决了。"

“埃尔德什不仅提的问题适中，而且问的人也合适。他比你自己还了解你到底能做什么。有多少人通过解答5美元甚至是1美元的埃尔德什问题而开始了他们的研究？他给予我们很多人从事数学研究所需要的信心。”[14]

“他有杰出的才能可以判断什么问题超出了你目前的能力范围。”格雷厄姆说，“提一个你解决不了的问题并不难，但埃尔德什提的问题总是让你解完以后增加了知识，扩充了视野。譬如攀岩，解决这样一个问题就如同往峭壁上钉入又一根钢锥，让你能够再上升一步。”[15]

在历史上发表数学论著多于埃尔德什的数学家只有一人，那就是18世纪的瑞士奇才莱昂哈德·欧拉。这位13个孩子的父亲写了80卷数学论文，据说许多论文是在第一次和第二次叫他吃晚餐之间的那30分钟之内完成的。而埃尔德什则在提好问题并促使这些问题得以解决这方面堪称世界第一。

■

对埃尔德什而言，数学是科学和艺术的伟大结合。一方面，数学是具有必然性的科学，因为它的结论在逻辑上无懈可击。跟生物学家、化学家甚至物理学家不一样的是，埃尔德什、格雷厄姆及其数学同行们确实证明了某些东西，他们的结论是建立在前提之上的三段论式演绎结果，就像因为“所有的总统都必死”且“比尔·克林顿是总统”所以“比尔·克林顿必死”一样。另一方面，数学又有审美的一面。一个猜想可以是“明显的”或者是“出乎意料的”，一个结果可以是“微不足道的”或者是“出色的”，一个证明可以是“烦琐的”、“令人惊异的”、或者是像埃尔德什所说的那样“直接从‘天书’中来的”。

一个好的证明，哈代写道，“是高度的不可预见性和必然性、经济性的统一。证明的方式是如此的奇妙和出人意料，所用到的理论是如此的简单，相比之下其结论是那样的意义深远但结果却又必然如此。”[16]

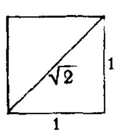
除此以外，一个理想的证明还应该让人清楚地看到某一特定的结果为何是真的。我们来看一看现代数学的著名结果之一“四色定理”，即“至多只需要4种颜色来绘制实际存在或想象中的国家的可能出现的任何平面地图，使得相互接壤的任何两个国家颜色都不相同”。自从19世纪中叶以来大多数数学家都相信这个貌似简单的定理是真的，124年以来许多杰出的数学家和专注于这一问题的业余数学家都试图证明这个定理却无功而返——其间也有些持怀疑态度的人企图找到反例。“我刚到AT&T工作的时候，”格雷厄姆回忆说，“有一位名叫E.F.摩尔(E.F.Moore)的数学家相信他能找到反例。每天早上他都带着一张2英尺(约61厘米)宽3英尺(约91厘米)长的大纸，上面画满了几千个国家的地图。‘我知道这张地图得用5种颜色。’他会自信地宣称并提出要是那并非一个反例的话，他将愿意输给我1美元。接着他便开始花上几个小时给地图着色，最后还是走过来摇摇脑袋给了我1美元。第二天他又会换一张地图重复同样的事情。对我来说，那一块钱可真是唾手可得！”

为什么摩尔寻找五色地图的努力总是徒劳呢？到1976年，原因才弄清楚。就在那一年，伊利诺伊大学的肯尼思·阿佩尔(Kenneth Appel)和沃尔夫冈·哈肯(Wolfgang Haken)终于征服了这座数学的珠穆朗玛峰。当“四色定理”已被证明的消息传到各大学的数学系时，老师们停止了上课并开启了香槟。几天后，他们才沮丧地得知阿佩尔和哈肯利用三台高速计算机累计工作了1 000多小时才得以证明“四色定理”。阿佩尔

和哈肯的工作只是表明所有可能的地图都只是1 500多种基本类型的一种，而计算机最多只用了四种颜色便将这1 500多种地图全部着上了色。这一证明过程长得无法用手工的办法来检查，以致一些数学家担心计算机也许一时疏忽而犯了一个小小的错误。在20多年后的今天，人们普遍接受了这一证明过程，但许多人对它还是不满意。“在‘四色问题’上我不是专家，”埃尔德什说，“但我姑且认为证明是有效的，可是不美。我更愿意看到一种证明能让我们洞察为什么四种颜色就足够了。”

美感和洞察——这是埃尔德什及其同事们经常使用却又解释不清的词。“这就好比问为什么贝多芬的第九交响曲很美。”埃尔德什说，“如果你不知道为什么，别人也无法告诉你。我知道数字是美的。要是数字不美的话，那就没有什么是美的了。”

萨摩斯岛的毕达哥拉斯显然也有同感。公元前6世纪，他从数字中创造了一种宗教，相信数字不只是计数的工具，而且还是友善的、完美的、神圣的、吉祥的，或者也可能是邪恶的。他崇拜整数及其比值(即简单的分数)，而且虔诚地信奉这一宗教。当他的一个信徒发现一种常见的量度——即单位正方形的对角线长度(2的平方根，或$\sqrt{2}$)既不能用整数又不能用简单分数来表示，从而使他的世界观受到挑战时，他便心慌意乱，迫使他的信徒保守秘密。



据传当一个信徒最终背叛他时，毕达哥拉斯便杀了

他——这就是埃尔德什所谓的"毕达哥拉斯丑闻"。

毕达哥拉斯肯定有其性格怪僻之处(他是一个素食者,而且不吃豌豆,因为豌豆让他想起睾丸),但他推崇"证明"的做法使数学得以建立在牢固的基石上。他对个别数字有着不可思议的感情。他认为220和284是"亲和"的。他的"亲和数"概念是基于人类的观念上,即朋友就是另一个自我。毕达哥拉斯写道:"(朋友)就是另一个我,而220和284也是这样。"这些数有一个特殊的数学性质:其中每一个数都是另一个数的所有真约数(除它本身以外的约数)之和。220的真约数是1,2,4,5,10,11,20,22,44,55和110,这些数相加得284;而284的真约数为1,2,4,71和142,这些数相加则得220。

第二对亲和数(17 296和18 416)直到1636年才由皮埃尔·德·费马发现。到19世纪中叶已经有许多数学家寻找过亲和数对,并发现了约60对亲和数,但第二小的亲和数对直到1866年才被一位16岁的意大利学生发现。迄今为止发现的亲和数对可以百计,但就像孪生素数一样,直至今日还没有人知道是不是存在无限多对的亲和数。埃尔德什认为亲和数是无穷无尽的,并写过一篇较早论述亲和数分布规律的论文。为什么证明素数是无穷无尽的那么容易,而证明亲和数无穷无尽却难得多?这也是数学中一个悬而未决的大难题。

毕达哥拉斯认为,如果一个整数等于能整除它的其他各整数之和,那么这个整数就是"完全"的。第一个完全数就是6:它能被1,2,3整除同时又是这几个数的和。第二个完全数是28:它的约数为1,2,4,7,14,而这几个数加起来也是28。中世纪时期,宗教学者认为完全数6和28是宇宙经纬的一部分:上帝创造世界花了6天时间,而月亮绕地球转一圈需要28天。圣奥古斯丁(St. Augustine)相信完全数是数字本身的特性,而不是它与经验世界的关系使然:"6这个数字本身就

是完全的,根本就不是因为上帝用了6天的时间来创造世界。反过来说倒是真理:因为6这个数的完全性,所以上帝用了6天的时间来创造世界。即使上帝创造世界不是花了6天,这个数仍将是完全的。"

除了6和28以外,古希腊人知道的完全数还有两个,即496和8 128(第5个完全数33 550 336直到17世纪末才发现)。因为希腊人知道的4个完全数都是偶数,于是他们怀疑到底是否存在奇完全数。截止1998年4月,数学家们已经知道37个完全数,其中最大的有1 819 050位数字,但所有这37个数都是偶数。每次只要发现一个梅森素数 2^n-1,就可以通过将它乘以 2^{n-1} 而得到一个新的偶完全数。因此,对应于已知的最大素数 $2^{3\,021\,377}-1$ 可以得到第37个偶完全数,即 $2^{3\,021\,376}(2^{3\,021\,377}-1)$。数学家们还无法断定第38个完全数一定就是偶数。奇完全数究竟是否存在,这仍是一个悬而未决的古老数学问题。同样令人生畏的另一个没有得到解决的问题是究竟有多少个完全数。谁也不知道完全数到底是数量有限的,还是无穷无尽的。

有关素数和完全数的问题,埃尔德什说过一句话:"小孩子问的问题也可以难倒大人。"而事实上不管是成人还是小孩,只要脑子里有些想法(有时候甚至没有想法),埃尔德什都爱跟他讨论数论问题。他谈论起数学来从来不择对象,以致他的朋友跟他开玩笑说,即使他坐上火车,也会跟乘务员一起来证明数学定理。

1985年,在火奴鲁鲁大学修数学课的一位名叫戴维·威廉森(David Williamson)的夏威夷高中学生证明,如果奇完全数存在,那么它必然有且仅有一个被4除时余数为1的素因数。教威廉森的教授不知道这一结果是否具有原创性,便建议他写信给当时正在夏威夷访问的声名赫赫的埃尔德什。最

后,威廉森收到了埃尔德什的回信:"你证明的结果实际上已经被欧拉证明过。他还证明了每一个偶完全数都可以表达为$2^{p-1}(2^p-1)$的形式,其中2^p-1为一个素数。此外,我们还知道[证明人为卡尔·波梅兰斯(Carl Pomerance)],如果存在奇完全数的话,它必然至少有7个不同的素因数。或许你对下述问题感兴趣……"现任职于国际商用机器公司的组合数学家威廉森当时倍受鼓舞:"跟埃尔德什的巨大成就比较起来,这封信算不了什么,但对于我来说,它却是意义深远。"[17]

完全数和亲和数问题都属于神童们可望一显身手的数学领域。就像象棋和音乐一样,这些领域无需很多的技术背景。而在历史学和法学等领域里却不存在神童,因为没有多年的功夫是掌握不了这些学科的。一个小孩可以在几分钟之内学会下棋规则,然后主要就靠他的天资了。初等数论(研究整数的学问)、图论和组合数学(研究计数和分类的问题)这些数学领域也是如此。你可以毫不费力地跟小孩解释清楚什么是素数、完全数和亲和数,然后他或她就可以独自揣摩和探究了。然而,也有许多数学领域需要专业训练,在这些领域,熟知定义和吸收前人的成果得用上数年的时间。等到这些神童成年并上了大学之后,他们一般都能耐心地去掌握这些技术性较强的数学领域并常常能在这些领域大显身手。埃尔德什却是一个例外,他一如既往地一头扎在了适合神童们发挥的数学领域。

但这并不等于说他的数学兴趣范围狭窄。相反,他开拓了全新的数学领域,只是这些领域一般都无需多少专业知识背景,因而激励了一代代数学神童的出现。

埃尔德什的强项是能提出简洁、巧妙的解题方法。他解决问题不是靠啃长篇累牍的方程式,而是靠构造简明扼要、思维深邃的命题。他是一个数学奇才,而他的智慧却常常超越

了他的专业领域。"1976年我们在得克萨斯农业和机械学院的数学休息室喝咖啡时,"1967年开始与埃尔德什合作的几何学家乔治·珀迪(George Purdy)回忆说,"我们看见黑板上有一个有关函数分析的问题。对这个领域,埃尔德什一无所知。碰巧我知道有两位这方面的专家刚刚得出一个长达30页的解答并因此而沾沾自喜。埃尔德什抬头看了看黑板说道:'那是什么?那也是一个问题?'我说'是的',然后他就走到黑板前面眯着眼睛看了看那个简要陈述的问题。他问了几个有关符号代表什么意义,便毫不费力地写出一个两行的解答。要是那还不是魔力,什么才是呢?"

埃尔德什是一个解决问题的高手。多数上了年纪的数学家,即使老当益壮,也只是搭搭理论框架。他们不再解决问题,而是开列一个数学研究的日程单,指出年轻一代应该研究的新领域或被忽视了的老领域。但埃尔德什决不是这样。只要问题还存在,他就要把它们彻底解决。

他的工作风格是同时和五湖四海的合作者对付多个问题。"每天他都和世界各地的数学家通电话,"AT&T的彼得·温克勒说,"他老是给我打电话:'温克勒教授在吗?'我的孩子们还很小的时候,一接到电话就知道那准是保罗大叔。他知道每个数学家的电话号码,但我认为谁的名字他都说不上来。* 我与他合作了20年,但我怀疑他是否记得我的名字。他直呼其名的唯一一个人就是汤姆·特罗特——他管他叫'比尔'。"

在面对面与人合作时,他喜欢同时对付几个人。"他满屋子转,就像一位超级棋手同时跟几个对手下棋。"曾与埃尔德什合著过8篇论文的布鲁斯·罗斯柴尔德(Bruce Rothschild)说道,"那可真够刺激。当他正与别人合作时,趁着他还没回到

* 意为只知姓而不记全名。——译者

你身边，你还有点时间考虑考虑。你还有机会知道别人正在着手解决什么问题。”埃尔德什自己可以同时思考好几个问题，但他却希望他的合作者精力集中在手头的问题上。当他察觉到他们走神时，他会说：“不许开小差。”

埃尔德什具有传奇般的神力，可以同时想不同的问题。曾于1955年与他合作发表一篇论文的迈克尔·戈隆布(Michael Golomb)回忆起在40年代他碰见埃尔德什正和当地一位国际象棋高手纳特·法恩(Nat Fine)下棋：“埃尔德什战胜纳特·法恩的机会很少，而且总是通过心理战术……我看见纳特双手托着下颌，仔细盘算着如何走下一步棋，而埃尔德什却似乎在全神贯注地研究一本厚厚的医学大百科全书……我问他：‘保罗，你在干嘛呢？你不是正跟纳特下棋吗？’他回答说：‘别打断我……我正在证明一个定理。’”[18]

■

在埃尔德什开拓的数学领域中，有一个颇具哲学魅力的组合数学分支称为拉姆齐原理。也就是在这一领域，格雷厄姆用到了那个创纪录的数。拉姆齐原理的基础思想就是不可能完全无序。无序的出现实际上只是一个度的问题。如果寻找的空间足够大，则任何数学“对象”总是可以找到的。“在电视系列片《宇宙》中，卡尔·萨根就不自觉地使用了拉姆齐原理。”格雷厄姆说道，“萨根说，人们经常抬头仰望天空，看见比如说有8颗星星几乎在同一条直线上。由于这些星星的直线排列，使得人们倾向于认为这些星星是人工安放在那里的，好像是为星际贸易路线而设置的引航灯。萨根还说，如果你观察的星群足够大，那么你就可以看见你想要看到的任何东西。那实际上就是拉姆齐原理在起作用。”

在萨根的例子中，数学家们想要知道的是，始终含有8颗几乎直线排列的恒星并且诸星位置任意安排的星群至少得有多大。一般而言，拉姆齐原理的研究者们寻找的乃是必定包含某一对象的最小"宇宙"。假设该物体不是8颗直线排列的恒星，而是两个同种性别的人。在这种条件下，拉姆齐原理的研究者们希望知道多少人组成的群体必定包含两个同种性别的人。很显然，答案是3，或者是像格雷厄姆的同事丹尼尔·克莱特曼(Daniel Kleitman)所说的那样："在3个普通的人中，必定有两个人性别相同。"

拉姆齐原理的命名源于罗素、G.E.摩尔(G.E.Moore)、维特根斯坦和J.凯恩斯(John Maynard Keynes)等人的杰出学生F.P.拉姆齐(Frank Plumpton Ramsey)。要不是拉姆齐于1930年年仅26岁时就死于黄疸病的话，他是很有可能会超过他的老师们的。在他的兄弟迈克尔(Michael Ramsey)追求神学的超现实世界的同时(迈克尔后来成为坎特伯雷的主教)，拉姆齐追求的却是数学的超现实世界。此外，他还研究过哲学和经济学。他写的有关税收和储蓄的两篇文章还受到凯恩斯的推崇，至今仍在经济学文献中广为引用。但真正成就他名声的还是他那8页的数学论文——后来埃尔德什就是利用这8页论文将它拓展成一个完整的数学分支。就像埃尔德什研究的所有问题一样，拉姆齐问题虽然常常难以找到答案，但这些问题本身的表述却很简单。

经典的拉姆齐问题可以用客人的数目来形容。要使至少有3个客人相互都认识或者至少有3个客人相互都不认识，那么最少需邀请多少客人？精心构造假设是数学家们的特性。这里，他们假设认识与否是相互对称的：如果张三认识李四，那么李四也认识张三。在这个假设的基础上，考虑6位客人的情况，并称其中一位为戴维。对于其他5位客人，戴维要

么是认识，要么是不认识，因此他至少认识3位客人或者至少不认识3位客人。假定结果是前者（结果是后者时情况类似）。现在考虑戴维认识的3个人之间的相互关系。如果他们之间有两位相互认识，那么这两位和戴维一起就组成了3位相互认识的客人——即达到了我们的要求。唯一的例外就是戴维所认识的那3位客人相互都不认识，那么这3人一起也达到了我们"至少有3人相互都不认识"的要求。为理解为什么5位客人不足以保证其中至少有3位客人相互都认识或者相互都不认识，请考虑其中一位叫迈克尔的客人，并假设他只认识其余两位客人的情况，而这两位客人又只分别认识迈克尔不认识的两位客人之中的一位。

上面我们写出了一个证明，虽然也许算不上"天书"中的，但仍不失为一个证明，而且这个证明还为说明为什么6个客人中必然包含3位相互都认识或3位相互都不认识的人提供了理解的线索。证明这一命题的另外一种方法就是"蛮干"，即列出这6个人相互关系的所有可能组合（一共有32 768种组合）并逐一检查每种组合是否达到规定的要求。然而这种"蛮干"的方法无助于理解而且很费时间。组合数学常常被称为"不用计算的计算艺术"。为了解决上述的拉姆齐问题，组合数学家希望避开"计算"这32 768种可能性。

假定我们希望相互间都认识或者相互间都不认识的人是4位而不是3位，那么至少需要有多少客人呢？埃尔德什以及拉姆齐原理的专家们证明18位客人可以满足上述要求，而且必须有18位。如果我们把前提数字提到5，那就没有人知道到底需要多少客人了。尽管20年前我们就知道答案在43至49之间，但埃尔德什怀疑再过上至少100年，也不一定能确定具体的答案。如果前提数字是6，问题就更为棘手，我们只知道答案在102至165之间。前提数字越高，则答案的已

知区间就越宽。

埃尔德什爱讲魔鬼随意提问的故事。如果你答错了，它就将毁灭人类。埃尔德什说："假定魔鬼问你前提数字是5的拉姆齐问题，我想你最好的对策是集中全世界所有的数学家停下他们手头的活儿来解答这个问题，用的是逐项检查的'蛮干'法，即逐一检查所有的情况"——存在着大于10^{200}(即1的后面加上200个0)这么多种的可能性。"但如果魔鬼问的是前提数字为6的拉姆齐问题，那最好的生存策略就是在它进攻之前先下手为强，因为即使对计算机来说，可能的情况也太多了。"借助于计算机解决的最复杂的拉姆齐"聚会"问题是确保至少有4位客人相互都认识或至少有5位客人相互都不认识的最低客人数。经过110台计算机的同时运算，1993年得出答案为25。

格雷厄姆的创纪录数就出现在一个类似的问题中。假设有任意数目的一些人，列出可由这些人组成的所有可能的委员会，考虑每一对可能的委员会。现将各对委员会分到两个组中的一组。不管怎么分派，格雷厄姆的"目标"是保证有4个委员会，其中所有的对都落到同一组里且所有的人归属的委员会个数是偶数。这些人的数目需要多大才能保证必然包含这样的4个委员会呢？格雷厄姆猜答案可能是6，但他和其他人所能证明的却是当人数等于他那个创纪录的数时总会存在这样的4个委员会。根据对特例的观察形成的猜测和所知的答案如此悬殊这一点就充分证明拉姆齐问题有多难。

常出现在数学竞赛题中的拉姆齐原理的一个较为简单的例子是将前101个整数随意排序。不管这些数字的排列有多乱，你总能找到由11个数字组成的递增或递减的序列。"这些数字不必连续，"格雷厄姆说，"它们之间可以隔开。你可以取第1个数，然后是第19个数，再然后是第22个数，再然后

是第 38 个数等等，但它们必须是递增或者是递减的。如果只取前 100 个数来排序，情况就不一定是这样。怎样排列这前 100 个数才能使你找不到所要求的 11 个递增或递减数字序列呢？我会先排 91,92,93…100，然后再排 81,82,83…90，再排 71,72,73，…80。清楚了吧？"如果还不明白，请参见下面的完全排序表：

91,92,93,94,95,96,97,98,99,100,81,82,
83,84,85,86,87,88,89,90,71,72,73,74,
75,76,77,78,79,80,61,62,63,64,65,66,
67,68,69,70,51,52,53,54,55,56,57,58,
59,60,41,42,43,44,45,46,47,48,49,50,
31,32,33,34,35,36,37,38,39,40,21,22,
23,24,25,26,27,28,29,30,11,12,13,14,
15,16,17,18,19,20,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10.

其中，最长的递增数列为由 10 个连续数组成的序列，比如说 81 至 90 或 41 至 50，每个序列的右边都没有第 11 个数字。对于递减数列，你可以从 90 多的数列中取一个数字，然后从 80 多的数列中取一个数字……等等，那样也只能得到 10 个数的递减序列。但如果把 101 无论加到这些数字中的什么地方——你还可以将这 101 个数字再任意重排，则总能找到一个由 11 个数组成的递增或递减序列。据格雷厄姆说，拉姆齐原理对上述结果作如下归纳，即为保证得到一个由 $n+1$ 个数组成的递增或递减序列，需要 n^2+1 个数；对于 n^2 个数，就有可能得不到这样一个序列。

格雷厄姆（他的旧汽车牌照为 RAMSEY，即"拉姆齐"）认为，也许还要等上数百年之后，埃尔德什和他在拉姆齐原理上的工作成果才有可能在物理、工程或现实世界的其他领域（包括他的工作单位 AT&T）得到重大应用。"应用并不是关键因

素,"格雷厄姆说,"我是广义地看待数学的,它代表着终极的结构和秩序。我把数学研究和控制联系在一起。耍球者希望有能力控制局面。在耍球运动界有一句熟知的谚语:'麻烦在于你往哪儿扔,球就往哪儿去。'问题在于你本身,而不在于月亮的阴晴圆缺或其他某人的过错。就像下棋一样,事情明摆在那里。数学也着实在那里,只待你去发现。我们来之前,素数定理就在那里;我们都去了,它将还是老样子。它永远就是那个素数定理。"

"从某种意义上说,"埃尔德什说过,"数学是唯一无限的人类活动。可以想象,人类将最终获得物理学或生物学的所有知识,但她终将无法获得所有的数学知识,因为数学领域是无限的。数字本身就是无限的。这就是我只对数学感兴趣的原因。"人可以写出 SF 的"天书"中的某一章节,但只有 SF 才真正把握着全书。

"数字的麻烦还在于我们只研究了其中较小的数。"格雷厄姆说道——奇怪的是此言出自一位用到的数字大得创世界纪录的人之口:"也许在真正大的数字里才有扣人心弦的发现,而对此我们却无能为力,也无法用以往的思维定势去思考。所以真正的数字世界或许就是不可捉摸的,我们的努力只是白费。我们的智力进化程度仅仅够我们避避风雨、找点食物并保护自己免遭杀戮而已,还没有高级到能掌握真正庞大的数字或者理解万维世界中的事物的程度。我曾想象在另外一个星系里,一个孩子正在跟小朋友们玩游戏。忽然间他若有所悟。他想起了数,想起了素数,想起了孪生素数猜想的一个简单证明以及许许多多其他的东西。但没过多久他就失去了兴趣并回到他的游戏中去了。"

我们地球人对数字的理解究竟有几何?每一项成果——譬如说埃尔德什证明了在任意一个整数和将它加倍之间总存

在一个素数——虽然在各种数学杂志里受到极力褒奖，但相对于对数字的某种宇宙级的理解这一目标来说都只是一个微不足道的进步。“要真正有所了解，还得等上数百万年的时间，”埃尔德什说，“但即使是那时的了解也还不是完美的，因为我们面对的是无限。”

原书空白页

第 2 章

小不点儿之谜

Temetnı tudunk.
(怎样埋人——我们很在行。)
——马札尔古谚

那是在 1930 年,住在布达佩斯的一个 14 岁男孩安德鲁·瓦兹索尼(Andrew Vázsonyi)在数学上已经显示出一些天份。于是他的父亲,城里最好的鞋店的老板(他认识城里所有的头面人物,至少知道他们鞋的尺寸),想要为他的儿子找一个脑瓜灵的伙伴。而埃尔德什的数学奇才的名声在城里是家喻户晓的——他的照片曾刊登在一所著名中学的数学杂志上,所以瓦兹索尼的父亲就邀请这位 17 岁的埃尔德什来店里和安德鲁一起玩耍。

"我现在还不明白,为什么当时我们同住在一个相当穷困的地方,我没去他家,他也没到我家来,而是到我父亲的鞋店去聚会,"67 年后瓦兹索尼回忆道,"父亲的店铺又窄,进深又长,是用上等的红木搭建的。两侧堆放的鞋盒直顶天花板,后边是我父亲的小办公室,里面有一个保险箱,一张桌子和一部电话,埃尔德什和我约好在那儿见面。我就坐在那儿等着。"

用鞋店老板娘凯西(Kathy)的话来说,埃尔德什从一开始就显出他是个"怪人"。进门前他先敲了敲店门,而在当时匈牙利已没有这种习惯了,就像这里也已没有这种习惯一样。

在这种异乎寻常的礼貌举动之后，他撇开一切引见和见面时诙谐轻松的寒暄，直奔后面而去。

“给我举出一个 4 位数，”他命令道。

“2 532，”瓦兹索尼答道。

“它的平方是 6 411 024”埃尔德什说道：“对不起，我老了，否则我会立即告诉你它的立方。”

“你知道毕达哥拉斯定理的多少种证明方法？”埃尔德什问。

“1 种。”瓦兹索尼说。

“我知道 37 种。你知道位于一条直线上的点不能构成可数集合吗？”继而埃尔德什给出了一种证明方法，然后他说他必须跑了。

“当埃尔德什说他必须‘跑’时，”瓦兹索尼回忆道，他确实是在跑，因为他几乎不像是在走路，而是“像只大猴子一样驼着背，侧着身子，摇摆着双臂，沿着街一溜儿小跑，引得行人时时回头观望。我们过去常去溜冰，他溜冰的样子也像一只猴。他这样令我尴尬，因为我想在溜冰时碰上姑娘们。当然了，他的兴趣不在姑娘身上。当他年纪稍大之后，他的步态不太像猴了，但仍有些奇怪。他老是走得很快，甚至发展到会向一面墙直冲过去，然后突然止步，猛然掉头，再往回跑。有一次他没能及时止住脚步，一下子撞到墙上，弄伤了自己。”

“我不明白为什么我们初次见面时他会那样——说的全是数的平方和各种各样的证明。在我渐渐了解他之后，我发现他并不是那种喜欢过分张扬的人。他对生活的看法并不是那样的。所以我真的不能解释为什么他总是在说他所知道的所有证法。他所讲的有好多我不懂。我后来发现他因为不为人所理解而声名狼藉。”埃尔德什在交谈时总是省略一些他以为对方能听懂而实际上他们并不懂的东西。那些对他这个精

妙深奥的头脑来说再清楚不过的事情，对于他周围的凡夫俗子来说却并不一定。瓦兹索尼记得曾对埃尔德什关于多点-线的那个证明很是不解，"我那时认识保罗·图兰，他就住在我父亲店铺楼上的一个套房里。埃尔德什和我初遇那次，他离开之后，我上楼去找图兰，他说埃尔德什告诉我的证明方法并不严谨。当然，也有可能是图兰错了而埃尔德什的证明是对的。"

"埃尔德什和我很快成了好朋友，不久之后我们几乎天天见面。我们一起去滑雪，定期在图兰那儿打乒乓球，我们一起徒步旅行，特别是我们一起讨论数学。各种各样有关埃尔德什的闲言碎语到处传播，我妈说她听到了一些关于埃尔德什的坏话——说他是同性恋，因为他对异性的态度很奇怪；还说他妈还一直给他穿衣服，给他洗澡。但那些说他是同性恋的话纯属无稽之谈。"[1]

■

埃尔德什 1913 年 3 月 26 日生于布达佩斯，他的双亲都是中学数学老师。当他的妈妈安娜在医院生他时，他的两个姐姐，一个 3 岁，另一个 5 岁，患上了猩红热，当天就都死了。"我妈妈不愿谈及此事，"埃尔德什说："我记得，两个姐姐的名字好像是叫克拉拉(Klara Erdős)和玛格达(Magda Erdős)。"其实在姐弟三人中，姐姐们要聪明些。"任何母亲都无法从这样的打击中恢复过来，"他的表妹弗雷德罗说，"她永远不能。"

■

死亡的阴影和悲剧性早已成为匈牙利人性格的一部分。

根据历史学家约翰·卢卡克斯(John Lukacs)考证，在埃尔德什年轻时所处的时期，万灵节那天，“成千上万的人手持鲜花涌向布达佩斯大大小小的公墓。出于他们独特的民族性格，匈牙利人比其他民族更看重万灵节。若要将马札尔(匈牙利的主要民族)两个词的谚语 *Temetni tudunk* 翻译过来，需要 10 个英语词才能表达它的本意:‘怎样埋人——我们很在行’，即便这样也没能完全准确地表达原意。”[2] 这谚语由来已久，远在匈牙利人饱受两次世界大战生灵涂炭之苦以前，这两次世界大战使匈牙利国内充满了血腥气。

很少有国家像匈牙利那样，历史上写满了暴力。在公元 9 世纪，游牧的马札尔士兵从东欧大草原出发，跨过喀尔巴阡山脉，最终在如今匈牙利的腹地多瑙河盆地中部定居下来，从而结束了他们居无定处的生活。马札尔人以精于弓箭和标枪著称，惯于袭击邻邦，曾将从巴伐利亚到萨克森的德国领土纳入自己的版图。由于后来改信基督教，马札尔人不得不为保卫新疆土而抵御接二连三的入侵者。他们坚守自己的领土，直到 1241 年，成吉思汗王朝的数十万蒙古铁骑大肆入侵，屠杀了半数的马札尔人，还将大部分幸存者掳为奴隶。这是一场使匈牙利几乎难以复原的大血战。“匈牙利人的问题在于，”有一次，埃尔德什在回顾他祖国历史的时候开了一个玩笑:“每次战争我们都站错了队。”

此后有一连串的外国国王统治过匈牙利，其间对土耳其人屡屡入侵的抵抗很不得力。在 1526 年 8 月 29 日的摩哈赤战役中，土耳其苏丹苏里曼一世(Süleyman Ⅰ)的军队杀死了匈牙利国王，将匈牙利人杀得溃不成军。土耳其人用恣意烧杀抢掠来庆祝胜利，造成 200 000 人死亡，100 000 人沦为奴隶，大批的金银珠宝流失。整村整村地被蹂躏，森林被付诸一炬，农田被夷为平地。1541 年，土耳其的大地主们变更了匈

牙利王国的领土格局,他们将马札尔人的领地一分为三:把北部和西部的土地让给哈布斯堡王朝;使特兰西瓦尼亚成了一个独立的穆斯林国家;将两座兄弟城市布达和佩斯留给了自己。1699年,土耳其人最终撤离了这两座兄弟城,而哈布斯堡王朝则扩大了他们在那里的管辖权。1867年,匈牙利收回了部分主权。虽说它仍是奥地利皇帝弗朗茨·约瑟夫(Franz Joseph)统治的哈布斯堡王朝的一部分,但匈牙利获准有独立的议会和半自治权。1873年,宫殿山城布达与多瑙河彼岸已收复的沼泽地区佩斯正式合并为一个城市——布达佩斯。

埃尔德什的出生地布达佩斯是座独具风格的现代化城市,拥有欧洲最大的证券交易所和世界上最雄伟的议会大厦。布达佩斯有一流的旅馆、花园式酒店和午夜咖啡馆,足以与巴黎和维也纳相媲美。这些都是"非法交易、淫乱、俏皮话、闲言碎语和诗歌的温床,是知识分子与反对压迫的人们的聚会场所"。[3] 它还是"旧世界"的城市,女人以美为荣,男人则崇尚骑士精神。布达佩斯"从来就不是一个让人觉得很惬意的城市,但却是诱人的,宛如一个活泼而又充满青春活力的少妇,尽管人人都知道她的风流韵事,绅士们还是愿意一近芳容"。[4] 这是匈牙利散文名家古拉·克罗迪(Gyula Krúdy)对布达佩斯的评价。他于1896年从外省迁居布达佩斯,那年布达佩斯的地铁,也是欧洲最早的地铁,开始投入运营。克罗迪对布达佩斯的热情难以抑制:

> 这儿的剧院里有世上最美妙的舞蹈,这儿人群中的每个人都认为自己是个绅士——哪怕他昨天刚从监狱里出来;医生的医术是神奇的,律师是世界著名的,即使租赁着最小房间的人也有自己的浴盆,店主们很有头脑,警察保卫着公众的安全,绅士淑女风度翩翩,路灯通宵达旦,看门人连一只苍蝇也不会放进去,电车会在一个小时

之内把你带到城里任何一个最远的地方，店员们并不把公务员放在眼里，妇女们爱看戏剧杂志，搬运工在街口谦恭地向你致敬，旅店老板询问你想吃些什么时会特意脱帽致意，马车车夫会毕恭毕敬地等候你一天，售货小姐发誓说你太太是世上最美的女人，夜总会和歌厅的姑娘们会有礼貌地听完你发表的政见，你会发现因为你目击一起事故而上了晨报，名人在露天咖啡店用痰盂，会有人帮你穿上大衣，当你要永远地离开这座城市时，主人会露出他那32颗金牙向你微笑告别。

第一次世界大战之前，像埃尔德什和瓦兹索尼这样的犹太家庭在布达佩斯生活要比在欧洲其他任何地方都舒服得多。1867年，哈布斯堡王朝解放了匈牙利犹太人，而且由于马札尔民族人口稀少，马札尔统治阶级鼓励犹太人移民入境，同化了的犹太人扩大了他们的队伍。为了鼓励同化，哈布斯堡王朝将贵族头衔授予犹太杰出人士。比如，数学家约翰·冯·诺伊曼(John von Neumann)的父亲、银行家麦克斯·冯·诺伊曼(Max von Neumann)于1913年被授予贵族头衔。“哈布斯堡王朝并非真的反犹太人，”瓦兹索尼说，“也就是说，匈牙利人并非不喜欢犹太人。”在哈布斯堡王朝，瓦兹索尼家族声名显赫，他的一个叔叔是1916年加冕的查尔斯四世(Charles Ⅳ)的内阁成员。许多被同化的犹太家族取了匈牙利名字。瓦兹索尼的原名是威兹菲尔德(Weiszfeld)，而埃尔德什的原名是英格兰德尔(Engländer)，匈牙利文的原意是森林繁茂。虽然埃尔德什的祖父母遵奉犹太习俗，他的父母亲却不这样。据曾写过3篇关于埃尔德什的文章的拉兹罗·鲍鲍伊(László Babai)说，当埃尔德什的父亲追求他母亲时，有一次他在犹太人的忏悔日那天去拜会她，发现她正在斋戒并且同时诵读莫泊桑，[5] 他指出了她做这两件事时的自相矛盾之处。她想他是对的，于是挥泪告别了旧的犹太习俗。

犹太移民被允许取得匈牙利国籍，他们开始融入匈牙利社会，许多犹太家族渐渐富裕起来。时至1910年，占匈牙利人口总数5%的犹太人拥有37.5%的土地，此外，51%的律师、60%的医生和80%的金融家都是犹太人。然而匈牙利并不是犹太人的天堂，对犹太人发迹的忿恨之情日益滋长，但还没等反犹情绪真正煽动起来，1914年6月28日的萨拉热窝事件转移了匈牙利人的视线，使整个国家组织起来对付共同的敌人。当时，哈布斯堡王朝的王位继承人弗朗茨·斐迪南大公(Archduke Franz Ferdinand)对波斯尼亚进行国事访问，被塞尔维亚爱国者加夫里洛·普林西比(Gavrillo Princip)暗杀。奥匈帝国立即对塞尔维亚宣战，随即俄国对奥匈帝国宣战，于是整个欧洲都卷入了第一次世界大战。到了8月份，当时埃尔德什才一岁半，他的父亲拉乔思(Lajos Erdös)在俄国发动的一次进攻中被俘，被发配到西伯利亚，去了6年。

父亲在监狱里，母亲要在学校教书，埃尔德什就由一个德籍女家庭教师抚养着。早在蹒跚学步时，埃尔德什的数学才能就已经初露端倪了，他研究日历，计算还有多久母亲才能放假回家。4岁时，他就算出一些诸如乘火车去太阳需多长时间之类荒唐可笑的问题来做游戏。他问他母亲朋友们多大，然后就会立即心算出她们已经活了多少秒，这样让她们觉得很有趣。那时候虽然他会对历史、政治和生物的课后辅导课很重视，但他知道他想要成为一个数学家。他刚会阅读，他母亲硬把医学书籍塞给他看，他如饥似渴地研读着。她显然有些朦胧的希望，希望埃尔德什长大后成为一名医生。在埃尔德什的童年，他母亲害怕学校是致命的儿童传染病的源泉，很少让他上学，他在家庭教师的指导下在家学习。上高中之前埃尔德什一直呆在家里，即便如此，他上高中后也是上一年不上一年，因为他母亲老是改变主意。

1918年，战争的硝烟散尽，作为战败国的匈牙利又陷入了一片混乱。大约有734 000名匈牙利战俘，绝大多数被关押在俄国，不知下落。死亡的战俘总数达431 000之多，埃尔德什和他的母亲不知道他父亲是否在死者之列。在一场兵不血刃的"秋玫瑰革命"中，奥匈帝国于10月30日宣布解散。旧王朝的军队为了表示他们支持民主革命，扯下他们制服上的皇室标志而用城里任何地方都能买到的红白星星标志打扮起来，庆祝万灵节。在11月16日自吹自擂、信誓旦旦的民主的匈牙利共和国仅仅维持了4个月，由于结束第一次世界大战缺少正式的和平条款，来自罗马尼亚、捷克斯洛伐克和南斯拉夫的武装匪徒继续对匈牙利的农村进行骚扰和掠夺，而新的民主政府对此无能为力。

1919年3月21日，特兰西瓦尼亚犹太人贝拉·库恩(Béla Kun)策划了一次非暴力政变，使得匈牙利共和国在一夜之间变成了匈牙利苏维埃共和国。贝拉·库恩在当俄国的战俘时成了列宁的忠实信徒。"多瑙河河畔这座酷爱音乐的城镇沉浸在充满火一般的激情和潮水般的优美旋律的《马赛曲》和《国际歌》的高亢歌声中，"[7] 阿瑟·凯斯特勒(Arthur Koestler)在其自传《蓝箭》里如是写道，"正如当年维也纳人曾随着约翰·斯特劳斯(Johann Strauss)的小提琴翩翩起舞，现在布达佩斯人正踏着《马赛曲》的旋律进军。"可惜库恩的政权维持的时间太短，甚至不及它的前朝——匈牙利共和国。他的部长们无能——据说他的财政部长甚至不懂如何签支票。布达佩斯逐渐出现了饥荒，库恩没能采取什么措施来缓和食物匮乏的问题。"布达佩斯人似乎主要靠冰淇淋度日，"凯斯特勒写道，"定量供应卡和红色政权发行的纸币所能买到的东西只有卷心菜、冻萝卜，还有冰淇淋……我对公社的同情可能源于那些天我们吃的[冰淇淋]多得令人咋舌，在那100来天中，我们早餐

吃,午餐吃,晚餐还得吃。当然这样说有点不太公平,因为在当时的食物中只有一样香草是我不喜欢吃的。”[8]

库恩的士兵们不打仗时在平民家中安排食宿。凯斯特勒的母亲设法赶走了两名士兵,而11岁的爱德华·特勒(Edward Teller,日后的氢弹之父,他反对共产主义)的家里就没有这么走运了,他家不得不忍受两个士兵睡在他家的沙发上并把尿撒在橡胶树上。特勒还记得听说过许多库恩的反对者们被吊死在街灯柱上的传闻,但他自己一具尸体也没看到。特勒的母亲伊洛娜(Ilona Teller),一个犹太人,对他们的女家庭教师这样说:“我为我的同胞所做的一切感到震惊,事情过后一定会有可怕的报复行动发生。”[9]

库恩当初承诺会把土地分给农民,但他却食言而肥,施行农田国有化政策,这使他在农村已基本上得不到什么支持。当列宁方面的援助得不到落实时,库恩只好眼睁睁地看着罗马尼亚军队一步步向匈牙利境内挺进,时至1919年6月底,罗马尼亚军队已抵达距布达佩斯不到50英里(约80千米)的地方。库恩的政权仅仅维持了133天便告夭折,他先逃到维也纳,最终逃到俄罗斯,在那儿,1937年斯大林把他当作叛徒枪决了。前奥匈帝国的海军上将米克洛斯·霍尔蒂(Miklós Horthy)取而代之,他骑着一匹白马进城,建立了战后欧洲第一个法西斯政权,大骂布达佩斯是座“罪孽之城”。他作为匈牙利的独裁者直到1945年。尽管霍尔蒂的政权很强大,他也无法阻止第一次世界大战的战胜国把一项惩罚性的和约强加给匈牙利。1920年6月4日特里阿农和约瓜分了匈牙利,共夺去匈牙利68%的土地和59%的人口。约1000万讲马札尔语的人整整有三分之一发现他们生活的地域又归并成了罗马尼亚、捷克斯洛伐克或南斯拉夫的辖区。

在库恩短暂的统治时期,埃尔德什的母亲被提升为她所

在中学的校长。当右翼政党发起反共总罢工时,她依然坚守岗位。当然她这样做并不是出于对库恩的顺从,而是不想因为缺了她而耽误学生的学业。为此,安娜·埃尔德什丢掉了她的工作——霍尔蒂一上台,她就立即被解了职,并被禁止在公立学校任教达26年之久,直到后来共产党重新上台执政。

霍尔蒂一上台就大搞白色恐怖,和它相比,几天之前的红色恐怖无论是在组织的严密性上还是在血腥程度上,都只能算是小巫见大巫。伊洛娜·特勒的担心应验了。全副武装的法西斯暴徒企图将布达佩斯的共产党支持者消灭干净,特别是把矛头指向据信与他们的教友库恩有勾结的犹太人。5 000人惨遭屠杀,许多人备受折磨,几万犹太人被放逐。爱德华·特勒、约翰·冯·诺伊曼、物理学家利奥·齐拉(Leo Szilard)和尤金·维格纳(Eugene Wigner)都离开匈牙利去了当时的科学家圣地——德国,"不料却被希特勒(Adolf Hilter)赶到了当时世界上最后的避难所——美国。在这点上,贝拉·库恩还无意之中为美国在发展核能方面取得卓越的领先地位立下了功劳":[10]这4位科学家都为制造原子弹贡献了他们的创造力。

安娜·埃尔德什留在了布达佩斯,整天为她儿子的安全担心。从她家的阳台上就可以看到犹太人在街上被殴打(维格纳在离开匈牙利之前也曾被暴徒袭击过)。"那时候反犹事件不胜枚举,"保罗·埃尔德什回忆道,"我妈也是一个犹太人,有一次这样问我:'你知道现在犹太人实在是太难了,我们是不是要洗礼?'我告诉我妈妈:'那好,你可以做你想做的,可我还会和原来一样。'这话从一个小孩子嘴里说出来实在不简单(我当时只有6岁或者7岁),因为事实上是不是犹太人究竟意味着什么,对于我来说是毫无意义的,从来就没有什么意义。"[11]即便是在他很小的时候,埃尔德什对于自己的与生俱来的权利所做的一切就是:坚持。无论形势对他多么不利,甚

至会为此付出生命的代价，他也绝不放弃自己的原则。纵观埃尔德什的一生，他藐视各种法西斯权威，无论是武装暴徒，还是不学无术的大学官僚、美国移民局官员、匈牙利秘密警察、美国联邦调查局、洛杉矶交警，即使是上帝也不例外。

虽然埃尔德什憎恨法西斯，但他喜欢用这个词，他随便用这个词来形容所有他不喜欢的东西。"有一次保罗和我去一个同事家里玩，正好他家有一窝刚生的小猫，"梅尔文·亨里克森(Melvin Henriksen)回忆道。他曾与埃尔德什合写过一篇论文。"保罗捧起了其中的一只，但被这小家伙挠了一下，于是他轻轻地将小猫放回窝里。他惊叫了一声'法西斯猫！'女主人问他为什么把一只小猫叫作法西斯，他说：'如果你是一只耗子，你就知道了。'"

埃尔德什和他的母亲在白色恐怖中幸免于难，1920年他父亲回家了，面容憔悴但精神愉快。"*Apuka*(爸爸)！"[12]埃尔德什喊道："您看上去真老！"在集中营，为了打发日子，拉乔思用一本书自学了英语，[12]如今他要教他的儿子。"这就是为什么我的口音那么糟的缘故。"埃尔德什解释道，"因为我的英语是跟一个从来没有听过地道英语的人学的。"[即便是埃尔德什在英国和美国定居后，他的英语水平也未见任何长进。"我还记得我第一次听他讲话时的情景，"约翰·塞尔弗里奇(John Selfridge)说，他曾写过13篇关于埃尔德什的文章，"那是在1946年，当时我是西雅图大学的新生，当我得知他要在斯坦福大学发表讲话时，我赶了过去。我非常激动，但我对他的口音很不习惯，除了一句'这儿有点儿暖，我可以打开窗户吗？'我什么也没听懂。我朋友告诉我他讲了一些很有意思的问题。"一部讲述埃尔德什的美国纪录片不得不给他那易引起曲解的英语发音配以字幕。"Vot vuz zat ven it vuz live? (What was that when it was alive?)"——"它活着时是什么样的？"——

当送上一盘肉的时候，他总是这样问。]

白色恐怖镇住了对法西斯专制的潜在反抗，霍尔蒂暂时停止了血腥镇压，但制定了限制犹太人活动范围的法律，使犹太人安分守己。1920年臭名昭著的 *Numerus Clausus*（学术机构人员录取最高限额法）——战后欧洲第一个主要的反犹太法颁布实施，该法规定大学录取的犹太籍学生不得超过犹太人所占全国人口的比例，即6%。埃尔德什12岁时就已决定，由于宗教信仰他最终将不得不离开匈牙利。但到了1928年，大学入学限制有所松动，对于那些在全国竞赛中获奖的学生，无论他的宗教信仰是什么都可免试直接进大学。这样，1930年埃尔德什17岁时得以免试进入位于布达佩斯的帕兹马尼—彼得大学学习，4年后获得数学博士学位。

20世纪30年代初，匈牙利国内的反犹之风正呈愈演愈烈之势，埃尔德什、瓦兹索尼和其他一些年轻的数学家们每周聚会一次，一起聊天、谈论时事，尤其是研讨数学。周日他们去布达佩斯郊外爬山越岭，"那可真算得上是长途跋涉，"瓦兹索尼说，"我们常在柏林广场碰头，然后坐上缆车去佐格里格特，通常我们有四五个人，但有时也多达20来人。"年轻的数学家们也常在城市公园有罩的'无名者'青铜像下的长椅上聚会，那是一名历史学家的雕像，他曾将12世纪的匈牙利国王们载入编年史。"当我们聚在一起时，"瓦兹索尼回忆道，"我们不时地提防有没有警察过来盘问我们，因为在霍尔蒂独裁统治时期禁止群众聚会。我们总觉得密探无处不在，这使我们不能畅所欲言。也就是从那时起埃尔德什开始形成自己特有的表达方式。我们当中有很多人就是当时所理解的意义上的共产主义者：是坚决反对霍尔蒂政权的。"在当时的情况下，出于安全方面的考虑，共产主义者之类的词是不便明说的，于是埃尔德什开始用"长波人"来隐指共产主义者，因为在电磁

波谱上红波是较长的。与此相应,他把霍尔蒂的拥护者及其他法西斯主义的信徒称为“短波人”。除此之外,他称小孩和其他小东西为 ε(厄普西隆),称孙辈为 ε^2,称酒为“毒药”,音乐为“噪声”,女人为“主人”(因为匈牙利妇女经常指使丈夫干这干那)。埃尔德什想来点葡萄酒时,他会这样说:“给我来一 ε 毒药。”于是,“酒、女人和音乐”变成了“毒药、主人和噪声”。而所有的孩子,在他眼里,无论是男是女,都是主人。“女人是主人,男人是奴隶,而孩子们每个人都是主人。”[13]埃尔德什说道,“因此当有人问我:‘什么时候一个小奴隶会变成奴隶?如果他原来是主人的话,什么时候他会变成奴隶?’我立即答道:‘当他开始追求主人时。’”

“埃尔德什的这些话很具感染性,”瓦兹索尼回忆道,“很快传遍了整个数学界。”在霍尔蒂统治结束好长时间后仍盛传不衰。随着时间的迁移,埃尔德什又增添了新词:他称苏联为“乔”或“乔王国”,而美国为“山姆”或“山姆国”。于是国际新闻(他将新闻 news 念成 nevsh)成了“山姆和乔的表演”。他杜撰了一个名为 FBU 的绝密警察机构,[14]即 FBI(美国联邦调查局)和 OGPU(苏联秘密警察局即克格勃的前身)的组合。据他说该机构在乔和山姆之间来回交换间谍。从 1940 年起,他开始称上帝为 SF。“这世上有这么多的丑恶现象,”埃尔德什说,“我都不敢说,假如上帝存在的话,是不是也是圣洁的。”埃尔德什非常赞赏阿纳托尔·法朗士(Anatole France)的小说《天使的背叛》把神描绘成邪恶的,而把魔鬼描绘得很慈祥。

在与圈外人士交谈时,埃尔德什也会不吝使用他那颇具特色的语言。比如,有一次在密歇根州的安阿伯,他问妇女选举联合会主席巴巴拉·皮兰尼安(Barbara Piranian):“你们主人何时能从奴隶那儿拉到选票?”(她答道:“这没有必要,不过我们要告诉他们该怎样投票。”)。[15]但并非所有的人都会如皮兰

尼安那样幽默地回答埃尔德什，伦敦大学的统计学家锡德里克·史密斯(Cedric Smith)回忆起在他刚结婚后不久，埃尔德什就把他岳母当做是他妻子。他岳母抱怨说："电话铃响了，一个低沉的声音(猜猜是谁?)说，'你好，你的奴隶在家吗？他是不是在讲课?'，她气呼呼地说，'我没有奴隶！'"[16]

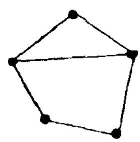
在无名者铜像下，埃尔德什和他的伙伴们有关政治和家庭的话题总是让位于数学。"我们沉迷于数学，"瓦兹索尼说，"埃尔德什最为痴迷，他沉浸在素数的世界里，素数是他的一切，他与素数之间似乎有着某种奇妙的密切关系。他 20 岁时便宣称要应用古代的埃拉托色尼筛法用初等运算证明伟大的素数定理。20 年后他肯定要做到这件事情。在他一生中素数都魂牵脑际。"

1932 年岁末，在无名者铜像下聚会的人群中多了埃丝特·克莱因(Esther Klein)，一个从格丁根大学念了一学期中途跑出来的颇有才华的学生，还有乔治·塞凯赖什(György Szekeres)，他是一个急于把试管抛掉而投身数学的化学系毕业生。"当时保罗虽然还是一名学生，但在数学上已颇有建树，他的脑子里装满了各式各样的问题。他说的那些话已在学校里成为传奇。"塞凯赖什回忆道，"埃尔德什总是用如同在一篇论文下签名时所用的那样的名字称呼我们——名和姓的前两个字母，在我们当中这成了普遍的惯例。时至今日，我还是经常颠倒歪曲姓名的前两个字母来称呼圈子里的老朋友。'塞凯赖什·盖依，敞开你那充满智慧的大脑吧。'这是保罗例行的邀请——或是一声令下？——让我们听听他的一个证明或一个问题。"[17]

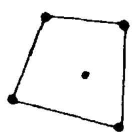
有一次，在他们每周一次的旅居活动中，克莱因与那些人一起讨论一个稀奇古怪的平面几何命题：平面上任给五个点，若任意三点不共线，求证必有四点能构成凸四边形。(一个四边形是由任意四条边构成的图形的通称。正方形、矩形和平

行四边形都是四边形。至于“凸”，是指从多边形内部的任意一点都可以直接“看到”多边形内部的任何另一点，即凸多边形内部任意两点的连线仍在该多边形内部。所以正方形属于凸四边形，而呈箭头状的四边形不属于凸四边形，因为位于一侧箭尾的点不能直接“看到”位于另一侧箭尾的点。描述凸多边形的另一个方法是说该多边形没有凹陷。）克莱因证明平面上任意三点都不共线的五个点的进行任意排列，结果不外乎归结为三种情况，而每种情况下都能保证构成一个凸四边形，命题从而得证。

第一种情况是五个点自身就构成一个凸五边形，其中任意四点均构成凸四边形。

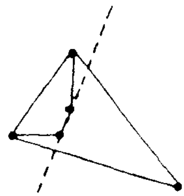


第二种情况是其中一点为其余四点所包围，则外部的四点构成凸四边形。

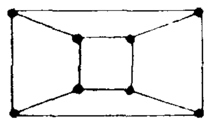


第三种情况是其中两点位于其余三点所构成的三角形内部。若作一直线使其经过上述两点，则该直线将三角形分为两部分，必有两个顶点位于直线的一端，那么该两顶点与直线上的两点构成凸四边形的顶点。

埃尔德什和塞凯赖什很喜欢这简练的求证，所以要将证明结果推广到能构成边数更多的凸多边形的情形。他们这群人中的另一名数学家恩德雷·麦凯（Endre Makai）很快就证明



为保证能形成凸五边形至少需 9 个点*。至于 8 个点，有如下反例证明它少了一个点而构不成凸五边形：



由这个特例又可作出一般情形的推想：平面上有 $2^{n-2}+1$ 个点，其中任意三点均不共线，试问这些点是否总能保证构成一个凸 n 边形？凸四边形的情形是成立的：$n=4$ 时，$2^2+1=5$，这种情形克莱因已证明过了。同样，$n=5$ 时，$2^3+1=9$，这种凸五边形的情形也由麦凯证明了。但一般情形的证明却让这三个匈牙利年轻人绞尽了脑汁。

"我们很快就意识到，"塞凯赖什回忆道，"单靠简单的争论是无济于事的，并感到了由于我们的圈子里提出一个急于解决却又因过于性急而解决不了的新的几何问题引起的激奋情绪。对我来说，解题的动机主要来自厄普西[Epszi——这是保罗对埃丝特的昵称，是 ε(厄普西隆)的缩写]**，这强烈地激励我争取率先提出解法，这样我就可以在几个星期后面带胜利的笑容对保罗说，'E.P.，敞开你那充满智慧的大脑吧！'"[18]

---

* 即平面上任给 N 个点，任意三点不共线，若总有五个点能构成凸五边形，则 N 至少为 9。——译者

** 其意犹如汉语中的"小不点儿" ——译者

塞凯赖什证明了平面上任意三点均不共线的 N 个点中,总有 n 个点能构成凸 n 边形的必要条件是 $N \geq 2^{n-2}+1$。“毫无疑问,这是个相当大的值。”尽管如此,塞凯赖什的证明还是赢得了克莱因的芳心,4 年后有情人终成眷属。埃尔德什把这个问题称作“甜蜜的问题”,这个名称载入了数学文献。

埃尔德什不太喜欢与异性打交道,这使他有更多的时间从事数学研究。不久他就把塞凯赖什的结论往前推进了一步,虽然他证明的点数与理论假设的点数还有很大的差距。人们认为 17 个点(2^4+1)是构成凸六边形的充分条件,而埃尔德什证明了若平面上有任意三点均不共线的 71 个点,则总能构成凸六边形。这是埃尔德什的第一个拉姆齐结论——若点数足够多,则构成凸多边形乃是不可避免的。当然,那时他们三人,无论是埃尔德什、克莱因还是塞凯赖什,都没有听说过拉姆齐的名字。60 年后,克莱因和塞凯赖什依然恩爱,他们定居在澳大利亚[埃尔德什称之为“内德”,源于内德·凯利(Ned Kelley),19 世纪的澳大利亚侠盗]的悉尼,他们依然不停地证明和猜测,只是没有了当年的那种狂热。

还记得那个撮合了一对美满姻缘的“甜蜜的问题”吗?这个问题的解答一直没有进展,直到 1996 年 11 月格雷厄姆和他的妻子决定继续研究它,“我们刚刚在埃尔德什的追悼会上遇到了塞凯赖什,我们一致认为,60 年了,也该有人让那个问题有所进展了。”格雷厄姆解释道,“然后芳蓉和我就利用了一天的时间尝试缩小点数上限与理论假设之间的差距,那天我们是在飞机上度过的,当时我们正飞往新西兰去参加一个数学会议。最终我们成功地将点数上限降低了一点,即将点数上限降为 70 点。从总体上看,这也许没什么大不了,但这毕竟是这个问题 60 年来往前迈进的第一步——要知道这个问题太棘手了。在证明这一步时,我们运用了一些新的方法,谁

知道呢？或许别人看到后会觉得如果能充分运用这些新方法，那就有可能取得更大的进展。数学就是这样一步步向前发展的。记得数学界有句古话：

难题才值得去攻，

越难就越有价值。

这个问题显然属于那种超级难题。"

不出格雷厄姆所料，当他们那新西兰空中之旅中的胜利传开后，其他数学家通过运用这些对证明至关重要的方法，一点点地把上限往下挪。"关于这个克莱因—埃尔德什—塞凯赖什问题，说来有趣，60年后，芳蓉和我才将上限降低了一点，也就是说，只要平面上有70个点(其中任意三点不共线)，就足以保证能构成凸六边形，当然理论设想的最小值(下限)还是17点。然后，丹尼尔·克莱德曼和利奥·帕奇特(Lior Pachter)又将上限降低了5点，即65点。经过了65年啊！昨天，"1997春，格雷厄姆说，"我收到一篇论文，他们已将上限降低了一半。噢！他们用的法子真妙！虽说上下限的差距还很大，从37点到17点，但我们是在夜以继日地干，努力将上限一步步逼近下限。数学就是这样一步步向前发展的。保罗在九泉之下也一定会为我们感到骄傲的，因为这正是他生前要我们做的。这个问题已经溶入我们的血液，成了我们身体的一部分，刚开始我们对它无能为力，但现在至少我们该做点什么，否则保罗会催我们的。先打裂它，开一个小口子，然后就有人想出来如何才能把口子弄得再大一点。"

1934年，也就是那个"甜蜜的问题"得到独创性解决的次年，由于政治原因埃尔德什离开了匈牙利。"我是犹太人，"埃尔德什说，"而匈牙利当时是个半法西斯国家。"他去英国的曼彻斯特大学从事4年博士后研究工作。在那儿他酷爱流浪的本性暴露无遗。"从1934年起，他从来没有连续7天不挪被

窝的。"埃尔德什的同事波洛巴斯(Béla Bollabás)写道,"他频繁穿梭于曼彻斯特、剑桥、伦敦和布里斯托尔等大学之间,"[19]而且自始至终"他都想去德国,法西斯的兴起使他未能如愿。他笑言传统的犹太人祝酒辞应改为'明年格丁根见!'"[20]

在他抵达英格兰的第二天,埃尔德什在剑桥大学遇到了现代解析数论之父哈代,他和埃尔德什一样蔑视权威和上帝。打小时候起,他就是一个好斗的无神论者,长大后他拒绝涉足任何带有崇拜色彩的地方,即使是他所在大学例行的校内选举这样的非宗教活动也不参加。(为了迁就他,该大学特意在校规里添了一条特殊的例外,使他"可以豁免某些职责,不参加礼拜"。)[21]与埃尔德什一样,哈代对上帝也是大有不敬之意,甚至怀疑 SF 的存在。在他乘船由斯堪的纳维亚去英格兰时,船颠簸得厉害,哈代匆匆给一个同事写了张明信片,声称他已证明出了黎曼假设(素数理论中的一项重要猜测),他估计 SF(他把上帝当作是他"个人的敌人")不会让他这么早就死,因为还有人知道他已经证明了黎曼猜想。虽然哈代蔑视宗教,但他——用《牛津杂志》上他的讣告中的话来说——"坚信数学真理描绘出一个明亮而又清晰,精致而又美妙的世界;与之相比,物质世界则混乱而又模糊。正是他的这种信念使他的朋友们认为他对数学的那种态度中有一种已近乎宗教的精神本质。"[22]

如果有一座专为怪人而设的名人堂,毫无疑问哈代和埃尔德什会被第一批收录。哈代从很小的时候就自我意识特强,曾两次企图自杀。上小学时,他故意在考试时写上错误的答案,免受考上第一名在全班同学面前接受奖励的折磨。他拒绝戴手表并尽量避免从自来水笔到电话之类的其他机械物品。就连照相或是照镜子他也无法忍受,以至于他用手摸着刮脸。他住进旅馆的第一件事就是拿毛巾盖上镜子。他老觉

得自己面目丑恶，而事实上他却像小男孩一样年轻英俊，即使他 50 多岁时还是如此。伯特兰·罗素称赞他有一双"明亮的眼睛"；[23]约翰·伊登瑟·利特尔伍德(John Edensor Littlewood)认为他很"美丽"；哥伦比亚大学数学家詹姆士·纽曼(James Newman)发现他"由于面部线条优美，轮廓分明，肤色健康，头发垂到额头上形成别致的刘海而变得惊人地英俊和有风度"；[24]小说家 C·P·斯诺(C·P·Snow)称赞他"如同红种印第安人的那种古铜色皮肤。他的脸庞很美——高高的颧骨，瘦削的鼻梁，帅气而冷峻"。[25]

数学是哈代的至爱，板球次之。他用解数学题与打板球进行类比来给他的数学论文添加佐料，使之更有趣味。他撰写的一篇重要论文涉及到"一条有关函数理论应用的极大定理"[26]，他认为，"如果用板球行话来描述可以很容易地掌握……设在某个给定的赛季，某局比赛的某一给定场次中，有一位击球手出场。"他称赞一个绝妙的证明，不"像是从天书上来的"，而是在"霍布斯那个档次的"[指萨里队板球队员杰克·霍布斯(Jack Hobbs)]。当澳大利亚击球手唐·布拉德曼(Don Bsadman)使霍布斯的纪录黯然失色后，哈代不得不改口称赞说："布拉德曼是比有史以来任何一个击球手都高出一个档次的击球手，如果阿基米德、牛顿和高斯被认为处在霍布斯那个档次上的话，我还是不得不承认在他们之上可能还有一个更高的档次，这令我难以想象。所以他们最好还是从现在起就挪到布拉德曼那个档次上更合适些。"[27]对于这种在论文中不断涉及到板球的情况，詹姆士·纽曼说，"对匈牙利人没有太大的帮助，"[28]更不要说像他自己这样的美国数学家了。

哈代的工作作风远比埃尔德什更有条理。他每天只花 4 个小时(上午 9 点到下午 1 点)用于数学研究，下午用来打板球和网球，晚上与罗素、斯诺、哲学家 G·E·摩尔、逻辑学家艾

尔弗雷德·诺思·怀特海(Alfred North Whitehead)、经济学家约翰·梅纳德·凯恩斯、历史学家G·M·特里维廉(G·M·Trevelyan)、小说家E·M·福斯特(E·M·Forster)、传记作家利顿·斯特雷奇(Lytton Strachey)及出版商伦纳德·伍尔夫(Leonard Woolf)这类人物或其他人热烈交谈。在三一学院,哈代曾是一个著名的学生论坛组织"先知社"的成员,在该组织中同性恋("先知社"成员称之为"高级兽奸")不但被认同,而且被认为是一种具有更高精神形式的爱。虽然同性恋并非进入该组织的必要条件,但在该组织内却占有绝对优势,以至于"即使是沉湎女色者也要装做鸡奸者,以免不被别人尊重"。[29]不知道哈代是有男友还是有女友,但显然他是一个精神恋爱者,用利特尔伍德的话来说就是"一个精神同性恋者"。[30]

哈代不仅是个神童——在他两岁时就能写出直到100万的数,后来在教堂中他会以求出赞美诗序号的素因数而自娱,他还是一个天生的运动员。"在他50多岁时他还能在网球场上的正式比赛中击败学校的二队队员,"他的朋友C·P·斯诺说,"在他60多岁时,我曾亲眼见到他救起一个直奔板球网而去的险球。"[31]他爱好广泛,这用他在给一个朋友的明信片上谈到的新年里的6项打算就可证明:"(1)证明黎曼猜想;(2)不能让211队在奥威尔举办的决赛阶段第四局比赛中出局;(3)找到足以让公众信服的证明上帝不存在的论据;(4)成为登上珠穆朗玛峰的第一人;(5)成为苏联、大不列颠及德意志联合王国的首任总统;(6)谋杀墨索里尼(Mussolini)。"[32]

自牛顿时代以来,数学的研究在英国就居于物理之后了。实际上,1877年当哈代出生时,纯数学在英国已奄奄一息了。哈代凭借他那有力的分析方法以及对理想模型的敏锐眼光,成功地使英国成为20世纪头25年纯数学研究的霸主,就像使得一支板球队在短短的一个赛季里由最后一名跃居冠军。

和埃尔德什一样，哈代也很善于合作，与他一起工作的人数虽少但却更勤奋地做了这么多的事情。从 1911 年起，哈代开始与利特尔伍德合作，这可是数学史上空前的一对搭档，35 年中，他们共合作撰写了 100 多篇论文，没有一篇是不重要的。

哈代和埃尔德什初次见面时，已经 57 岁，他的分析能力在走下坡路。6 年后他写出了数学史上最著名的文学作品《一个数学家的自白》，这是一份令人沮丧的证明自己创造力江河日下的证据。该书一开头如是写道："一个职业数学家发现他自己竟然在写数学家的故事，这对他来说，是何等的可悲！"[33]"一个数学家的职责应该是做点什么事情去证明新的定理，为数学的发展添砖加瓦，而不是对自己和他人已做过的事评头论足。"哈代警告说，数学是年轻人的游戏："伽罗瓦(Galois)死于 21 岁，阿贝尔(Niels Henrik Abel)死于 27 岁，黎曼死于 40 岁……迄今为止我还没有发现一项重要的数学进展是由超过 50 岁的人取得的。"[34]当时，21 岁的埃尔德什还太年轻，并不知道他会成为哈代上述猜想最有名的反证。

埃尔德什曾问过哈代他对数学最重要的贡献是什么，哈代立即答道："发现了拉马努金(Aiyangar Srinivasa Ramanujan)。"[35]除了与利特尔伍德搭档之外，哈代仅有的另一个密切的合作者就是与他共同工作了 4 年的传奇式人物拉马努金。他是一个贫穷、多病、靠自学成才的印度杰出人材，1914 年，26 岁时在哈代的安排下来到英国。埃尔德什想通过哈代对拉马努金有所了解是因为虽然他们没有见过面，但曾研究过同样的数学问题。埃尔德什最初是在 1931 年听说拉马努金的研究工作的，当时他刚用一个巧妙的方法证明了切比雪夫定理(即在一个整数和它的倍数之间总有一个素数存在)，一个匈牙利同行告诉他拉马努金早在 1919 年就发现了一种类似的

证明方法，于是埃尔德什查出了拉马努金的证明，对这种方法之巧妙大为赞赏。

哈代告诉埃尔德什，他是在一封盖有“马德拉斯，1913 年 1 月 16 日”的邮戳的信送到他办公桌上时发现拉马努金的。信中附带的几页公式哈代有点熟悉，但是载有许多奇怪的符号，信是这样开始的：

亲爱的先生：

> 请允许我作自我介绍。我是马德拉斯港口信用社财务部的一名工作人员，年薪只有 20 英镑。我今年 23 岁，只上过中学，没有接受过高等教育。离开学校后，我用供我支配的业余时间来研究数学……我是在努力为自己闯一条新路。我专门对发散级数从总体上进行研究，当地的数学家们认为我所得到的结果是“惊人的”。

哈代怀疑这位冒昧来信的家伙是否是个妄想者，但他还是继续读了下去。

> 最近我有幸拜读了您的一本名为《无限的秩序》的小册子，在第 36 页上我发现有这么一条陈述：对于任意给定的一个整数，至今还没有一个确定的表达式可以计算出小于该数的素数个数。我已经发现一个表达式，其计算值与真实值非常接近，误差几可忽略。[36]

拉马努金实际上是在宣布他已经发现传奇式的素数定理的更高级表述。哈代对这种假设付诸一笑，嗤之以鼻，把信搁到了一边。但那些奇怪的公式老是萦绕在他的脑际，于是等到晚上，在院长与导师的餐桌上，他让利特尔伍德也看看这封信，是妄想者还是天才？利特尔伍德也感到疑惑了。经过两个半小时的深思熟虑，这对数学界的最佳搭档得出了结论：天才。

后来证实，拉马努金完全是自学成才。他从图书馆借了一本名叫《纯数学基本结果要览》的书，这本书是一个名叫乔

治·肖布里奇·卡尔(George Shoebridge Carr)的写手写的,他靠替学生们应付考试而勉强糊口。这本书中罗列了6 000个数学公式,没有一个是给出证明的。拉马努金毅然开始用他独创的符号重组所有的公式,由于他负担不起太多的纸张,所以他只好在石板上演算,然后再将结果记到他自己的笔记本上。而且由于那本书上没有证明,所以拉马努金也不知道数学证明的一般格式。他靠直觉来加速运算,但是是靠很有把握的直觉。当然,素数既是埃尔德什的朋友,也是拉马努金的朋友。

在哈代的回信中,这位特别讲究数学形式严谨的数学家力劝拉马努金给出他那奇妙猜想的证明。证明就是哈代的一切,他曾告诉罗素,"如果他能找到一个可以证明我(罗素)会在5分钟内死亡的方法,毫无疑问他会为失去我而感到遗憾,但由于这证明而带来的快乐会超过因失去我而带来的悲痛。即便这样我也是很理解他的,不会因此生气。"[37]哈代回信了,拉马努金感到很高兴,因为他也给另外两位知名数学家寄去结果,但从来没有收到回音。但他看到要他给出所谓的证明时,他弄不明白哈代到底想要些什么,而且他对重复那些他已经知道是正确的论断的推导过程不感兴趣。他觉得要是把已做过的工作再重复一次的话,生命未免太短暂了,但究竟短暂到什么程度,他一点也不知道。1920年,就在哈代劝说他来到英国6年后,年仅32岁时,他死于肺结核。他结过婚,但没有子女,留下3本记满着至今数学家们仍在努力解码的深奥数学思考的手记。1976年,使数论研究者感到欣喜的是,发现了他的第四本手记。这4本手记上记有数以百计的有深刻见解的公式,但全都没有证明,好像是上帝恩赐的一样。

在哈代和拉马努金持续进行合作的一段时期内,这两个人将纯数学界翻了个个儿。这是东方与西方、神秘与现实的完美结合,他们的结合是不可阻挡的。在茫茫黑夜里女神娜

玛吉丽的幻象引导着，她的介入使拉马努金不顾婆罗门出国旅行的禁令首先与哈代相会，并使他顿然省悟。“对我来说一个方程，”拉马努金说，“除非它表达了上帝的某种旨意，否则是没有任何意义的。”[38]拉马努金曾偷看过天书，而哈代则为拉马努金曾偷看过的内容添加了证明。“我将成绩归功于他，多于这世上的其他任何人——只有一人例外，”哈代说，“我与他的伙伴关系是我一生中最浪漫的巧合。”[39]

拉马努金在英国的日子过得并不舒心。他感到孤独，怀乡成疾，渴望故乡的饭菜，厌恶英国的天气，总是生病。虽然他不断证明出新的数学定理，但由于缺乏正规数学教育和不断地重复证明前人已证明的定理而感到苦恼。1918 年早春，拉马努金在伦敦地铁的一辆疾驶而来的列车前跳轨。“接下来的事就极容易被看作是个奇迹，”罗伯特·卡尼吉尔（Robert Kanigel）在他撰写的拉马努金传记里写道，“列车上的警卫发现了他，及时地拉动刹车，列车呼啸着在他前面几英尺停下了。虽然他失血过多，胫骨部留下了很深的伤痕，但拉马努金还活着。他被逮捕并带到了伦敦警察厅。”[40]此后他没再企图自杀，但他已不再是原来的他了——他染上了肺结核。

埃尔德什说哈代喜欢给数学家们按百分制打分。哈代给了自己打 25 分，利特尔伍德 30 分，伟大的数学家希尔伯特 80 分，而他给了拉马努金满分——100 分。“虽说哈代很谦虚地只给自己打了 25 分，”埃尔德什说，“但他给拉马努金打 100 分却表明了他对拉马努金的研究工作的尊重。”[41]

哈代说拉马努金“可以以一种非常奇怪的方式记住蕴藏在任何数字内部的独特特征。利特尔伍德说每一个正整数都是拉马努金的私人朋友。记得有一次，我去普特尼拜访他，我坐的是一辆车号为 1792 的出租车，我觉得它是个无趣的数字，我也希望它不是不吉利的。‘不，’他回答道，‘这是个非常

有趣的数字;它是可以用两种不同方式表示成两个数立方和的最小正整数。'"[42]拉马努金领会到:

$$1729 = 12^3 + 1^3 = 10^3 + 9^3$$

埃尔德什喜欢听哈代讲拉马努金的故事。有两次埃尔德什在印度作学术报告,他都接济了从未谋面的拉马努金的遗孀。推想起来哈代是喜欢听埃尔德什的学术报告的,但他和他的同事布里兹(Brits)却不得不尽力辨别埃尔德什那充满匈牙利口音的英文,比如,埃尔德什将"pineapple upside down cake(菠萝反而放在蛋糕上)"说成是"pınnayopp-play oopshiday dovn tsockay"。[43]

埃尔德什和拉马努金都沉迷于寻找所谓的渐近公式,比如素数定理就是其中一例。渐近公式就是在小于任意大整数范围内满足一定特征的数的个数的估算公式。你在数轴上走得越远,换言之,你所取的数越大,你的估算值就越接近于真实值。素数定理给出了不大于整数 n 的素数个数的估算公式。[44]高斯研究表明,n 越大,估算值越精确。也就是说,如果你取了足够大的数,估算值和真实值就会趋于"渐近"而相等——也就是说,它们是收敛的。

整数上限 n	素数的 实际个数	高斯估计的 素数个数	误差(%)
1 000	168	145	16.0
1 000 000	78 498	72 382	8.4
1 000 000 000	50 847 478	48 254 942	5.4

拉马努金在给哈代的信中宣称他已超过高斯是错误的,但他确实在高斯甚至尚未考虑的诸多方面提出了渐近公式。

在剑桥大学的头一年,拉马努金致力于合数的研究工作,合数是一个与素数相对的概念,它可以分解为多个素数之积。

比如 6 就是一个合数，因为它可以分解为 2 和 3 的乘积。15 也是合数，可分解为 3 和 5 的乘积。拉马努金引进了一个新概念：高级合数，它是一种"高级的"合数，与素数之间的"距离"加大了。一个素数只有两个因子（1 和它本身），而高级合数的因子数多于任何小于它的合数的因子数。12 就是一个高级合数，因为它有 6 个不同的因子（1，2，3，4，6，12），因子数的个数比小于 12 的任何合数多。24 也是高级合数，它有 8 个因子（1，2，3，4，6，8，12，24），因子数的个数比任何小于它的合数多得多。拉马努金列出了一个不大于 6 746 328 388 800 的高级合数表。这张表从 2，4，6，12，24，36 开始，在 2 到 50 000 之间包含了 25 个高级合数，除漏掉了 29 331 862 500 外，该表囊括了直至 6 746 328 388 800 的所有高级合数。拉马努金发现了一个可以估算出小于任意大整数 n 的高级合数个数的渐近公式，这在当时是一个了不起的发现。30 年后，埃尔德什又改进了这个公式。

自从欧几里得时代起，数学家们就知道任何一个合数都可唯一地表示成素数的乘积：

$$2^a \times 3^b \times 5^c \times 7^d \cdots$$

式中指数 a、b、c、d 等均为整数。拉马努金研究了高级合数的素数分解形式。比如，

$$6 = 2^1 \times 3^1$$

$$12 = 2^2 \times 3^1$$

$$24 = 2^3 \times 3^1$$

他注意到在上述三个例子中，最大素数的指数值均为 1，他认为这是所有高级合数的共性（只有两个数例外：4 和 36，它们分别可表示为 2^2 和 $2^2 \times 3^2$）。他还注意到在这三个例子中，2 的指数值不小于 3 的指数值。拉马努金将他的发现推而广之，认为在所有高级合数的素数因子分解式（$2^a \times 3^b \times 5^c$

$\times 7^{d}\cdots$)中,第一个指数 a 不小于第二个指数 b,第二个指数 b 不小于第三个指数 c,以此类推。这规律适用于他所检验过的所有合数。[45]比如:

$$332\,640 = 2^5 \times 3^3 \times 5^1 \times 7^1 \times 11^1$$

$$43\,243\,200 = 2^6 \times 3^3 \times 5^2 \times 7^1 \times 11^1 \times 13^1$$

$$2\,248\,776\,129\,600 = 2^6 \times 3^3 \times 5^2 \times 7^2 \times 11^1 \times 13^1 \times 17^1 \times 19^1 \times 23^1$$

拉马努金将他对高级合数的研究结果整理成一篇长达52页的论文,这使他在1916年3月获得剑桥大学的学士学位,学校已不再要求他选修课程,因为他总是独自呆在房间里,边就着酥油吃小扁豆边探索素数的奥秘。他研究的简单素数问题没完没了。"哈代说过,"埃尔德什喜欢说,"任何一个傻瓜都能提出让最聪明的人答不出的素数问题。"

1917年,哈代和拉马努金发表了一篇关于周数的论文,所谓周数是指与邻近的合数相比,该合数具有多得多的素数因子。衡量一个数的周度的方法之一,是算出该数的每一个素因子在素数分解式中出现的次数。对于1 000 000,它的素因子分解式是 $2^6 \times 5^6$,则它的周度为12(素因子指数之和)。介于999 991与1 000 010之间的素因子指数和的平均值为4,而1 000 000的素因子指数和为该平均值的3倍,它是一个地道的周数:

数	周度	素因数分解式
999 991	3	$17 \times 59 \times 997$
999 992	6	$2^3 \times 7^2 \times 2\,551$
999 993	2	$3 \times 333\,331$
999 994	3	$2 \times 23 \times 21\,739$
999 995	2	$5 \times 199\,999$

999 996	5	$2^2 \times 3 \times 167 \times 499$
999 997	2	$757 \times 1\,321$
999 998	4	$2 \times 31 \times 127^2$
999 999	7	$3^3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 37$
1 000 000	12	$2^6 \times 5^6$
1 000 001	2	$101 \times 9\,901$
1 000 002	3	$2 \times 3 \times 166\,667$
1 000 004	5	$2^2 \times 53^2 \times 89$
1 000 005	4	$3 \times 5 \times 163 \times 409$
1 000 006	3	$2 \times 7 \times 71\,429$
1 000 007	2	$29 \times 34\,483$
1 000 008	8	$2^3 \times 3^2 \times 17 \times 19 \times 43$
1 000 009	2	$293 \times 3\,413$
1 000 010	4	$2 \times 5 \times 11 \times 9\,091$

哈代和拉马努金提出了计算周度的渐近公式。22年后，埃尔德什与合作者马克·卡克，现代概率论的奠基者之一，发现了数的周度与概率论中的钟状曲线（即正态曲线）的峰值有密切关系。两个如此远离的研究课题（即素数理论和概率论）实际上却是相互联系的，这充分显示了数学的威力和广度。

哈代和拉马努金最著名的合作论文是研究整数分割理论的，即对于任一正整数 n，可用多少种方法将其表示为正整数之和。比如5，可以有7种“分割”方式：

$$5 = 5$$
$$5 = 4 + 1$$
$$5 = 3 + 2$$
$$5 = 3 + 1 + 1$$
$$5 = 2 + 2 + 1$$

$$5 = 2 + 1 + 1 + 1$$

$$5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$$

随着 n 的增加,可分割的方式 m 急剧增加。$n = 10$ 时,$m = 42$;$n = 50$ 时,$m = 204\ 226$;$n = 100$ 时,$m = 190\ 569\ 292$;当 $n = 200$ 时,m 已是一个非常庞大的数字:3 972 999 029 588。1918 年,在一篇长达 40 页的论文里,哈代和拉马努金提出一种精确得令人难以置信的近似公式,用以计算整数分割方法的种数。1942 年,埃尔德什研究表明,哈代和拉马努金本没有必要运用如此繁杂的方法推导他们公式中的首项,该项可以通过"初等"方法得到。

初等方法并不一定更简单。在这里,初等方法是指将证明局限在实数范围内,实数包括整数、有理数和无理数。整数包括 0、自然数(1,2,3…)和自然数的相反数(-1,-2,-3…)。有理数(英语中称为 *rational number*,源于 *ratio*,即比率)只不过是分数的异名罢了,如 2/3 和 3/5。当用小数形式表示时,有理数必须是有限小数(如可用 0.25 表示 1/4)或是无限循环小数(如 0.333 333 3…,即 1/3;或 0.142 857 142 857 142 857 142 857…,即 1/7)。另一方面,无理数则是无限非循环小数(小数部分没有循环出现的部分),比如$\sqrt{2}$(1.414 213 562 3…)和 π(3.141 592 653 5…)。而所谓的虚数是不在初等方法研究范围内的,如$\sqrt{-1}$,它自乘之积等于 -1。$\sqrt{-1}$,亦被写作 i,是虚构的数,因为它违反了这一传统观念:两个正数或两个负数之积总为正。埃尔德什并没有从原则上反对虚数,他只是更习惯于将他的研究局限在他所熟悉的整数、有理数和无理数范围内。当他在 1934 年拜访哈代时,哈代认为素数定理无法用初等方法证明,假如有朝一日素数定理可以通过初等方法证明出来,那么数论课本将会被扔进垃圾堆里,只好从头写过。哈代卒于 1949 年,就在他去世后几个月,埃尔

德什和塞尔伯格宣布他们用初等方法证明了素数定理。

■

埃尔德什在英国的4年间数学研究硕果累累。“但我很思念故乡，”他回顾道，“所以我每年要回布达佩斯三次，分别是在复活节、圣诞节和夏天。”在回乡期间，他看望双亲并和瓦兹索尼等老朋友相聚。

“他不在我身边使得我的数学研究困难重重，”瓦兹索尼说，“没有人和我一起探讨。我对投影几何学(研究立体在各个面上投影性质的学科)情有独钟，而他恰恰是我们这个圈子里唯一可以和我探讨此类问题的人。数学领域里也有时髦不时髦之分。人们总是对某类问题才感兴趣。在19世纪关于椭圆函数的论著连篇累牍。”此后，有数十年对椭圆函数无人问津，直到最近因这种函数与求小数位数极多的π值有关，研究它的兴趣才又有些高涨。“投影几何学在我刚接触它时已是一潭死水，”瓦兹索尼说，“我有研究这门无人问津的学问的能力，我也不知道这对我来说是幸运还是倒霉。埃尔德什和别人不一样，他鼓励我从事这项研究。”

1936年，在埃尔德什回到布达佩斯期间，瓦兹索尼“正在研究一种经典的图论——欧拉的柯尼斯堡定理，并设法将它推广到无限。可我只有必要条件而缺少充分条件，”[46]他回顾道，“我几乎天天与埃尔德什见面。但我犯了一个致命的错误——我在电话里把自己的发现告诉了他。我称这个错误是致命的，是因为他在20分钟后就回电告诉了我证明充分性的方法。‘该死的，’我想，‘现在我只好和他合作写这篇论文了。’这个著名的埃尔德什数‘1’究竟给我带来了什么，我几乎一无所知。”

然而埃尔德什离开后出现了一个空白。“我无法继续图兰的研究工作,”瓦兹索尼哀叹。“当时有一个迫在眉睫的问题:我如何得以保全性命,如何逃离匈牙利。”

第 e 章

山姆和乔的问题

这是一个广为流传的故事：有一天戴维·希尔伯特注意到班上有个同学不来上课了。当他听说这个学生决定放弃数学去当诗人，希尔伯特对此评价道："好！他的确不具备当数学家应有的想象力。"

——罗伯特·奥瑟曼(Robert Osserman)

如果朱庇特像一个人，那么写他的诗人又会是什么样的人呢；如果他是一大团旋转着的甲烷和氨气，诗人们就必须保持沉默吗？

——理查德·费恩曼(Richard Feynman)

1938 年 3 月 13 日，奥地利向希特勒俯首称臣，这使德意志第三帝国的疆土扩张到匈牙利的西部边境，距布达佩斯仅百余千米。"对我来说，再在春天回匈牙利就太危险了，"埃尔德什说。"但我还是在夏天偷偷溜了回去。但 9 月 3 日发生了捷克事件，我不喜欢这消息，因此我当天晚上返回了英格兰，三周半后我又踏上了去美国的旅程。"他先来到新泽西州普林斯顿高等研究院工作，但薪水很低。一年后研究院只和他续签了六个月的工作合同，因为他们发现他为人笨拙，不循常规。而具有讽刺意味的是，1975 年埃尔德什回顾他的职业生涯，他回忆 30 年代后期呆在该研究院的那些日子时，竟天真地把这个时期说成是他在数学上最有成果的时期。显然，

世界的和平与安宁并不是他发挥数学天才的先决条件。1939年,他周围的世界一片混乱,对家人和朋友们安全的担忧像一团阴影时时笼罩在他的心头。9月1日希特勒大举进攻波兰,第二次世界大战爆发了。当时,虽说霍尔蒂不允许德军假道匈牙利向波兰进军,但他抵抗纳粹的决心却日益消蚀。

1935年,埃尔德什在剑桥大学结识了专门从事集合论研究工作的斯坦尼斯拉夫·乌拉姆,5年后他俩开始合作。和埃尔德什一样,乌拉姆也是个神童,他不到20岁就已证明无限集合论中的一个关键问题。“当斯坦听说埃尔德什在研究所的研究职位未能续签后,”乌拉姆的遗孀弗朗索瓦丝·乌拉姆(Françoise Ulam)回忆道,“他想帮助埃尔德什尽快从这件事的阴影中走出来,于是他邀请埃尔德什去他任教的威斯康星州的麦迪逊大学作一次学术报告。”埃尔德什愉快地接受了邀请。

1941年,埃尔德什“27岁,思乡成疾,郁郁寡欢,”斯坦·乌拉姆在他的自传里写道,“老是为他一直留在匈牙利的母亲担忧。”[1] 自从6月22日霍尔蒂作出加入纳粹、进攻苏联的致命决定后,美国和匈牙利之间的邮路就被中断了,埃尔德什就再也没能和他母亲取得联系。埃尔德什的麦迪逊之行“成了我们长期持久、感情深厚的友谊的开始(虽然时不时我们也会有点小摩擦),”乌拉姆回忆道,“由于手头拮据——如他常说的‘穷’,埃尔德什很希望他的报告能够极受欢迎。”就在那次以及随后的数次访问中,“我俩就数学问题进行了广泛的探讨和研究,做了大量的工作,”乌拉姆说,“我们的讨论只是在收听收音机和阅读报刊中有关战争报道和政治分析时才稍作中断。”埃尔德什的外表给乌拉姆的印象很深:“埃尔德什身材中等偏下,极度的神经质,他几乎总是‘上窜下跳’,或者挥动他的双臂,他的眼神表明他总是在思考着数学问题,只有在他就

一些还模糊不清的世界时事政治和人类的普遍问题发表相当悲观的言论时才会被打断。如果他突然产生了一个有意思的想法,就会一下子跳起来,挥舞双臂,然后再坐下来。"

1943年乌拉姆离开了麦迪逊,来到新墨西哥州的洛斯阿拉莫斯,成为那里诸多物理学家中的一员,他们的任务是秘密研制原子弹。在那里数学的一些奇妙应用是乌拉姆闻所未闻的。他告诉洛斯阿拉莫斯的一个物理学家奥托·弗里希(Otto Frisch):"他(埃尔德什)是一个纯数学家,他惯于用抽象的符号从事数学研究,不过近期他已'堕落'到运用具体的数,甚至是小数的地步了,他佯称这对他来说是种耻辱。事实上,他具有神秘的技能可以运用最深奥、抽象的数学工具来预测原子弹的反应。"[2] 乌拉姆劝说埃尔德什加入到他们的行列,并建议他写信给他的同乡特勒,此人于1935年先期移居美国。他给"爱德华教授"写了信,由于在信中特别强调他战后可能要回布达佩斯,于是就被取消了资格。他就是这样,喜欢和权威们对着干。他给洛斯阿拉莫斯的另一位匈牙利移民彼得·拉克斯(Peter Lax)寄了张明信片:"亲爱的彼得,我的间谍告诉我山姆正在造原子弹,告诉我,这是真的吗?"

据洛斯阿拉莫斯的数学家理查德·贝尔曼回忆,埃尔德什曾来到位于洛斯阿拉莫斯附近的圣菲,为加入他们而申明自己的理由。"他一直坚定不移地反对法西斯,想在洛斯阿拉莫斯这样一个能充分发挥聪明才智的地方大显身手。不幸的是,他拒绝在要求战后对原子弹的研制保持沉默的文件上签字,考虑到洛斯阿拉莫斯有那么多的外国科学家,签订这种协议实在是很可笑的。有一次,贝蒂·乔(Betty Jo)、我、彼得·拉克斯、约翰·凯梅尼(John Kemeny)以及一个匈牙利籍士兵,我们一起带他到拉·方达去吃晚饭,当埃尔德什谈及彼得和约翰远在匈牙利的亲戚时,他用的是匈牙利语。然后他却用英语

大声问:“原子弹的研制进展如何?”[3]

即使埃尔德什没暴露他对匈牙利的思乡之情并保证战后对原子弹的研制保持沉默,他可能也不会被邀请到洛斯阿拉莫斯。由于两年前的一次误捕,联邦调查局(FBI)已留了他的案底。两年前的夏天,在长岛,埃尔德什由于在一家军用电台边逗留而被美联邦调查人员逮捕。他与联邦调查局的官员的争吵成了纽约街头小报的重要内容。1941 年 8 月 15 日的《每日新闻》在头版醒目位置登出:3 个外国人窥探短波电台。《邮报》的报道用了较为谨慎的标题“FBI 击败间谍的恐吓:3 个外国人只不过是学生而已”,这就使人茫然不知所适了。

> 里佛海德,8 月 15 日。据联邦调查局消息,昨天报道的间谍案纯属虚惊一场。那 3 个极端可疑的外国人因昨日在南汉普顿麦凯电台附近窥探而受到怀疑并遭拘留。FBI 如是说。FBI 应该知道事实的真相,于是对他们盘查了半个晚上。
>
> 看来是电台的工作人员打电话报警说,有一个日本人和另外两个外国人(后来证实一个是匈牙利人,另一个是英国人)正在描摹 200 英尺(约 60 米)高的发射塔。电台工作人员称当他们经盘问后便匆匆驾车离开了。
>
> 其中一人的父亲是稽查员
>
> 这 3 个人随后在 14 英里(约 24 千米)外的东汉普顿被捕。据称他们分别是加久谷静雄(Shizuo Kakutani),29 岁;保罗·埃尔德什,28 岁;阿瑟·哈罗德·斯通(Arthur Harold Stone),22 岁。
>
> 加久谷静雄说他是普林斯顿大学研究生院数学系的学生,埃尔德什则自称是数学研究员,斯通说他父亲是邮政稽查员,他也是普林斯顿大学的学生。
>
> 他们的胶卷全是空白的

他们众口一词地说，他们是在去芝加哥参加一个学术会议的途中，顺便停下来看看长岛的海滨，在麦凯公司的短波电台边逗留只不过是一时心血来潮，并没有其他任何企图。

事情就是这样。他们都是学生，对发射台没什么兴趣，而且发现在他们车内找到的令人生疑的照相机里有10张已曝光的底片——全是空白的。

"结果是我们被无罪释放，"埃尔德什回忆道，"我当然不会因此而谴责美国政府，当时远未到麦卡锡时代，他们这样反应是情有可原的。"[4]但对于那个神经过敏的报警者，他认为是"不太聪明"。当时斯通正驾车带埃尔德什及加久谷静雄到长岛去旅游，他们没有注意到路边有一块"禁止入内"的牌子，一直驱车来到"无线电发射塔"边——其实那可能是个秘密的军用雷达装置。

这3个人迈出汽车，舒展身躯，并欣赏海边美景。他们互相拍照留念之后正准备返回汽车，警卫让他们尽快离开，于是他们便离开了。这名警卫疑心大起，便报警称有3个日本人鬼鬼祟祟地写写画画，并拍了照，"被发现后便匆匆离开，令人生疑"。不过，是他要求他们离开的，而且"只有一个是日本人"，埃尔德什申辩道："我们并没有记录什么，而且我们照的都是人。"他们当时一直在谈论数学，但警卫因为一句也听不懂而生疑。

"本来没什么事，"埃尔德什说，"但他们拉响了紧急警报，四处搜捕我们，而我们对此一无所知，继续驱车前行，驶往长岛的一头……吃午饭时我们被捕了。其实当两名侦探偷听过我们的谈话后，就已经知道这是场误会，他们弄错了。但为时已晚，那时已给联邦调查局打了电话。"联邦调查人员询问他们为什么会对那块"禁止入内"的牌子视而不见，埃尔德什告

诉他们说,“我正在思考问题。”“思考些什么?”他们追问道。“数学。”[5] 他回答。“到了晚上,一切都水落石出。”埃尔德什回忆道,“于是我们被释放了……当时有许多报纸对此事进行了报道,只有纽约的《每日新闻》令人不快,声称有人曾见到我在一个海军基地附近划船,但这纯属诬蔑。”[6]

1943 年埃尔德什在普度大学找到一份非全日性工作,并且,如乌拉姆回忆录所写的,“不再身无分文——用他自己的话说是‘甚至不再负债’”。[7] 在普度大学埃尔德什又与学校当局有点小小的冲突。他喜欢不分昼夜地散步。有一次,他午夜时分在外面溜达时,被警察叫住了。他既没有带身份证,也没带驾驶执照,总之没有携带任何可以证明他身份的证件,警察不由得疑心大起,“你在干吗?”他们问。“我在思考问题。”“思考什么?”他们追问。“数学。”他回答。于是他们满腹狐疑地让他走了。

在普度大学数学系,埃尔德什是颗耀眼的明星。“他使我们获益良多,不仅因为他是个数学天才,”迈克尔·戈隆布回忆道,“而且因为他的到来极大地丰富了我们的业余生活。由于拘禁在中西部农业州的一个小镇上,远离国际大都市的繁华,我们都觉得与现代文明隔绝了。如今有了埃尔德什,一切都不同了,他过去生活在欧洲文化中心,与一些世界知名数学家很熟,尤其是他对科学文化和国际政治有着广泛兴趣。”[8] 普度大学的数学老师们每周和其他系的老师聚会,一起进行一次非正式的演讲,然后再进行一次生动活泼的、谁都可以参加的讨论。有一次座谈会演讲人没到,“又没有准备其他项目,于是埃尔德什毛遂自荐,进行演讲。他完全是即兴发挥,不借助于任何稿子,做了一个引人入胜的关于蜜蜂的色视觉方面的近期研究进展状况的报告。我们都大长见识,感到惊讶,从未想到保罗还会对诸如此类的东西感兴趣。”

并非仅仅是普度大学的数学老师才发现埃尔德什数学以外的知识广博。虽然数字是他的至爱，但埃尔德什对其他知识也有所涉猎，他绝不是那种书呆子。在他年轻时，在一天花19个小时做数学题之前，他读历史、读科技、读政治，凡是他读上了的东西他都手不释卷。没几年的工夫，人们便对他那渊博的历史和科技知识惊叹不已。雅诺什·帕克还记得在匈牙利科学院宾馆里把埃尔德什介绍给拉乔思·厄列克斯(Lajos Elekes)时的情景。“你从事什么职业？”[9] 埃尔德什首先发问，这是他无论什么时候见到一个新人时的开场白(除非他与一位带小孩的人初次见面时，他会问：“这个 ε 多大了？是主人还是奴隶？”)。许多人在知道厄列克斯是一位正在写一本15世纪匈牙利将军雅诺什·亨雅迪(János Hunyadi)的书的历史学家之后都会无言以对。可埃尔德什立即追问厄列克斯：“匈牙利军队在1444年瓦尔纳战役中惨败于土耳其的原因是什么？”

■

在第二次世界大战开始后的两年半时间里，虽说反犹暴力行为时有发生，并且霍尔蒂为了绥靖希特勒而对犹太人施行一系列的法律和经济制裁，但相对来说匈牙利国内犹太人的生活还是不错的。但1944年3月19日，德国纳粹悍然入侵匈牙利并迅速全面清洗匈牙利犹太人，犯下了被温斯顿·邱吉尔(Winston Churchill)称为“有史以来最令人发指的滔天罪行”。至7月7日，437 000多犹太人，其中有50 000人来自布达佩斯，被流放到德军奥斯威辛集中营。那年冬天，滞留在布达佩斯犹太人居住区的160 000名犹太人中，共有20 000人惨遭杀害或被饥饿、寒冷和疾病夺去了生命。埃尔德什的母亲

被迫搬离了布达佩斯犹太人居住区。1945年2月14日,苏联军队解放了布达佩斯。8月,1941年以来就从未收到父母任何消息的埃尔德什收到了一封电报,他母亲仍健在,他的堂妹玛格达·弗雷德罗在奥斯威辛集中营中幸存下来。但其他消息则不太妙,“纳粹杀害了我母亲的4个兄妹,”埃尔德什说,“我父亲不幸于1942年死于心脏病。”

苏联当局(他们对匈牙利的控制到1988年才结束)马上就用他们的恐怖代替了纳粹恐怖。“按照斯大林的命令,为完成指标,匈牙利囚犯们被遣送到苏联古拉格集中营,他们中的绝大多数未能生还。苏联红军在大街上随意抓人充当‘小机器人’,”[10]拉兹罗·鲍鲍伊写道,“刚刚经历‘劳务公司’和尼赖斯(Nyilas,匈牙利纳粹团伙)的纳粹白色恐怖的折磨,图兰又在布达佩斯被一苏联巡逻兵拦住去路,被要求出示证件,由于他是几天前刚从纳粹的围捕中逃出来的,图兰没有任何身份证,所幸的是他带了一本1935年翻版的《托木斯克数学力学研究所通报》,上面刊有他和埃尔德什合著的一篇论文。显然是这本战前苏联杂志打动了巡逻兵,图兰被放行了。‘没想到数论还有这样的妙用。’图兰后来和埃尔德什谈及此事时说。”(历史往往有惊人的相似,28年后,在洛杉矶,面对美国官员,数论同样也拉了埃尔德什一把。当时他因不遵守交通规则而被扣,[11]身上又没有身份证和现金,警察威胁说要把他送进监狱。于是他向他们出示了他的一本厚厚的论文选集《计算的艺术》,卷首插图有他满面笑容的照片。他们耸耸肩,权作它是他的身份证。加州大学洛杉矶分校的同事拉姆齐原理专家布鲁斯·罗思柴尔德替他付了罚款。)

乌拉姆在第二次世界大战期间健康状况欠佳。1945年冬天,他因头痛欲裂、胸口麻木、口齿不清而被急忙送往医院。“我忽然想到柏拉图(Plato)在一本书中曾写过,当苏格拉底

(Socrates)在狱中服下芹叶钩吻毒汁后,"后来乌拉姆写道,"狱卒让他来回走动,并告诉他当麻木的感觉逐渐由双腿上行至头部时,他就会死去。"医生发现乌拉姆的大脑严重发炎,"呈淡粉红色而非通常的灰色"。他们给他施用了抗生素,并在他头盖骨上钻了一个洞以降低颅压。当经过几天术后昏迷之后,肿胀消退,乌拉姆也苏醒过来的时候,他的外科医生想测试一下他的智力,问他 8 与 13 的和是多少。"他问这样一个问题使我太不好意思,我只好摇了摇头。"乌拉姆回忆道,"然后他问我 20 的平方根是多少,我答道:约等于 4.4,可他一言不发,于是我追问:'是吗?'。我记得当时雷尼(Rainey)医生笑了,明显地松了口气,说:'我不知道。'"[12]洛斯阿拉莫斯的官员们也密切关注着乌拉姆的智力状况,唯恐他会在迷迷糊糊的状态下泄露原子弹的秘密。他们也曾怀疑是否是原子辐射导致了他的脑炎,但结果发现他根本没有与放射性材料靠近到受危害的程度。

住院几周后,他可以出院了,当他的妻子弗朗索瓦丝扶着他走出医院时,埃尔德什出现了,并神气活现地问候道:"斯坦,真高兴看到你还活着,要不然我不但要为你写讣告,还要独自完成咱们合作的论文。你这就回家吗?好吧,我和你一起走。"弗朗索瓦丝对此惶恐不安,"我怕他会把斯坦累坏了。"她在 50 年后回忆道,"在乘车回家的路上,他缠着斯坦讨论数学问题,斯坦根本得不到休息。我们一到家,他就要斯坦和他下棋,开始我非常害怕,但我很快意识到了埃尔德什这貌似疯狂之举背后的深意;他通过这些智力锻炼帮助斯坦恢复对数学的自信。"斯坦刚开始对下棋有点紧张,唯恐忘记了规则。当他赢了第一盘时,乌拉姆又担心这可能是埃尔德什故意输给他的。埃尔德什要求重下,"我同意了,"斯坦在他的自传里写道:"虽然我觉得很累,但我又赢了。这时埃尔德什说:'让

我们到此为止吧，我累了。'从这句话我意识到他刚才跟我下棋时是认真的。"[13]埃尔德什在他们家呆了两周，像连珠炮似的用数学的陈词滥调轰击乌拉姆。"那段日子我很艰难，"弗朗索瓦丝说，"我不得不小心照顾他们俩，斯坦喜欢他呆在我家，而我也对埃尔德什的帮助终身难忘，是他帮助斯坦在数学上又踏踏实实地站稳了脚跟。"

40年后，也就是1984年，的确是埃尔德什撰写了乌拉姆的讣告，他的逝世中断了他与埃尔德什在数学上长达50年之久的合作。"乌拉姆总是哀叹岁月的无情，但他为自己在古稀之年仍能打一手好网球而自豪，"[14]埃尔德什写道，"他真的很幸运，并没有遭受年迈体衰和老年痴呆这两大恶魔的折磨，他在依然还能求证、还能猜想……的时候猝死于心脏病，死时没有痛苦，没有恐惧。在《一千零一夜》里，国王受到这样的祝福：'哦，国王陛下，祝您万岁！'而对于一个数学家、一个科学家来说，最实际的祝福莫过于：'哦，数学家，祝您的理论万岁！'我期盼斯坦有这样的好命运。"

初等数论是埃尔德什所钟爱的，也是乌拉姆早期的研究内容之一。在中学，乌拉姆就曾努力想找到一个奇完全数(当然，他没能找到，但别人也没有)。作为一个"道吉提"["dogity"——这是埃尔德什和乌拉姆的专用术语，用来指代他们很反感的"神童"(prodity)一词]，乌拉姆重新对初等数论产生兴趣完全是偶然的。那是在他临死前一年，也就是1983年，有一天乌拉姆在一个学术会议上听一篇"又臭又长的报告"，[15]为了消磨时光，他信手涂鸦，随手写了一连串的连续整数，从1开始，由内向外以逆时针方向盘旋。

他惊讶地发现，素数(图中呈黑体字)都排列在一条条对角线上。在这次偶然发现的激励下，乌拉姆又画了其他一些连续整数的方形螺线。洛斯阿拉莫斯的数学分析数值积分计

100	99	98	**97**	96	95	94	93	92	91
65	64	63	62	**61**	60	**59**	58	57	90
66	**37**	36	35	34	33	32	**31**	56	**89**
67	38	**17**	16	15	14	**13**	30	55	88
68	39	18	**5**	4	**3**	12	**29**	54	87
69	40	**19**	6	1	**2**	**11**	28	**53**	86
70	**41**	20	**7**	8	9	10	27	52	85
71	42	21	22	**23**	24	25	26	51	84
72	**43**	44	45	46	**47**	48	49	50	**83**
73	74	75	76	77	78	**79**	80	81	82

算机 Maniac Ⅱ内贮存有头 9 000 万个素数，而武器实验室则拥有一套世界上首批研制成功的计算机绘图设备。乌拉姆和洛斯阿拉莫斯的两个同事，马克·韦尔斯(Mark Wells)和迈伦·斯坦(Myron Stein)，在 Maniac Ⅱ上编程绘出直至 1 000 万个整数正方螺旋排列图，素数仍保持奇特的对角线排列特性。

既然连埃尔德什这样一位拥有世上最聪明数学头脑的数学家，都未能找出素数的分布规律并以公式概括出来，乌拉姆就凭他那在不经意间写出来的螺旋排列图，能行吗？“乌拉姆在数学上不成熟的‘涂鸦之作’可不容轻视，”在 1964 年，马丁·加德纳写道，毕竟是“经他建议，由他和爱德华·特勒构思出的方案促成了世界上第一个热核反应装置的诞生”。[16]

在一幅较小的图上，乌拉姆从放在中央的 17 开始，作出了直至 272 的正方螺旋排列图。

素数又落在一条条对角线上。事实上，从左下角到右上角的主对角线上排列的全是素数：227，173，127，89，59，37，23，17，19，29，47，73，107，149，199 及 257。对于研究素数的学者来说，这些数字是再熟悉不过的了。早在 18 世

272	**271**	270	**269**	268	267	266	265	264	**263**	262	261	260	259	258	**257**
213	212	**211**	210	209	208	207	206	205	204	203	202	201	200	**199**	256
214	161	160	**156**	158	**157**	156	155	154	153	152	**151**	150	**149**	198	255
215	162	117	116	115	114	**113**	112	111	110	**109**	108	**107**	148	**197**	254
216	**163**	118	81	80	**79**	78	77	76	75	74	**73**	106	147	196	253
217	164	119	82	**53**	52	51	50	49	48	**47**	72	105	146	195	252
218	165	120	**83**	54	33	32	**31**	30	**29**	46	**71**	104	145	194	**251**
219	166	121	84	55	34	21	20	**19**	28	45	70	**103**	114	**193**	250
220	**167**	122	85	56	35	22	**17**	18	27	44	69	102	143	192	249
221	168	123	86	57	36	**23**	24	25	26	**43**	68	**101**	142	**191**	248
222	169	124	87	58	**37**	38	39	40	**41**	42	**67**	100	141	190	247
223	170	125	88	**59**	60	**61**	62	63	64	65	66	99	140	189	246
224	171	126	**89**	90	91	92	93	94	95	96	**97**	98	**139**	188	245
225	172	**127**	128	129	130	**131**	132	133	134	135	136	**137**	138	187	244
226	**173**	174	175	176	177	178	**179**	180	**181**	182	183	184	185	186	243
227	228	**229**	230	231	232	**233**	234	235	236	237	238	**239**	240	**241**	242

纪，欧拉归纳出公式：n^2+n+17，当 n 取由 0 至 15 间的整数时，该式计算值均为素数，这 16 个数与图中主对角线上的数正好相吻合。

n	$n^2+\ n+17$	= 素数
0	$0^2+\ 0+17$	= 17
1	$1^2+\ 1+17$	= 19
2	$2^2+\ 2+17$	= 23
3	$3^2+\ 3+17$	= 29
4	$4^2+\ 4+17$	= 37
5	$5^2+\ 5+17$	= 47
6	$6^2+\ 6+17$	= 59

7	$7^2 + 7 + 17 = 73$
8	$8^2 + 8 + 17 = 89$
9	$9^2 + 9 + 17 = 107$
10	$10^2 + 10 + 17 = 127$
11	$11^2 + 11 + 17 = 149$
12	$12^2 + 12 + 17 = 173$
13	$13^2 + 13 + 17 = 199$
14	$14^2 + 14 + 17 = 227$
15	$15^2 + 15 + 17 = 257$

当把 $n = 16$ 代入公式 $n^2 + n + 17$ 时,则得到了一个合数 289,即 17^2。然后欧拉又提出另一个公式:$n^2 + n + 41$,该式对 n 取由 0 至 39 的整数均成立,即所得计算值均为素数,但当 $n = 40$ 时,该式值为 1 681,即 41 的平方,是一个合数。

ManiacⅡ证实了欧拉提出的公式 $n^2 + n + 41$ 与实际情况吻合得相当好,在 1 000 万以下,得出的素数个数占素数总数的比例高达 47.5%。乌拉姆发现了命中率可与欧拉的公式相媲美的一些公式,但使得像埃尔德什那样的素数爱好者们颇感失望的是,乌拉姆的"涂鸦之作"最终并未能有所突破。尽管表面上素数倾向位于对角线上,但数论专家们业已证明,如欧拉公式一样,没有任何公式是只生成素数的。于是乌拉姆放弃了这种异想天开,并在他临终那年恢复了他以往作为核武器时代的资深政治家的角色,就科学和道德间的关系作演讲。有一次,有人问他,如果他们在洛斯阿拉莫斯的研究证明不可能制造出原子弹,那么这个世界将会怎样。这个世界,他说,"显而易见会更安全,摆脱了自我毁灭和人类灭绝的危险。不过,在物理学上要证明不可能性几乎是不可能的,而数学上则相反,他们可以提供某些最美的纯逻辑的例子。"[17]

■

埃尔德什把帮助他的同事们保持在数学上锐意进取的势头当作自己的使命。当他们病了,正如乌拉姆也常生病一样,他会激励他们树立恢复健康的必胜信念。可惜的是并非每个人的恢复情况如乌拉姆那样好,一些患了病的同事虽然可以恢复他们的数学能力,却再也无法树立信心,这无疑是一个悲剧。乔恩·福克曼(Jon Folkman)是兰德公司的一位颇有才华的年轻数学家,被誉为圣莫尼卡的智慧宝库。他在1960年末被确诊脑部肿瘤。肿瘤很大,外科手术预后不良,医生认为能安全切除的可能性很小,即使能切除,他也会变成植物人。但尽管很难,手术却成功了。"手术后埃尔德什和我马上去医院探望他,"格雷厄姆说,"我们一进病房,埃尔德什就用数学问题向乔恩'将军',虽然他刚动完脑部手术,他竟能回答出来。他回答得很慢,但毕竟答出来了。然而出院后,他的性格变了,总是郁郁寡欢,以为自己的能力衰退了,但事实上他的数学能力反而比术前有所提高。为了测试自己的数学能力,他遍览各种会议文集上有待解决的数学问题,然后逐一地解决。真是不可思议!乔恩和高斯一样,对自己的要求太高,以致一些很不错的研究工作也没有发表。终于有一天,他买回了一枝枪——开枪自尽了,年仅31岁。真是太令人痛心了!他在兰德公司的上司,D·雷·富尔克森(D. Ray Fulkerson)为未能及早发现乔恩的苦恼并及时挽救他而自责。'对于乔恩自杀一事,我一直难以释怀。'富尔克森说。后来他也自尽了。"

即使是伟大的数学家也常有一阵阵爆发的不安全感,唯恐他们的脑力江河日下,或是他们的证明并非如开始想象的

那么正确和重要。伯特兰·罗素曾告诉哈代他做了一个“可怕的梦”。[18]罗素梦到“公元2100年，在某大学图书馆的顶层，”哈代说，“一个图书管理员手持一个大桶，在书架边逡巡，他从书架上依次取下一本又一本书，看上一眼，然后把它们放回书架或是扔进桶里。终于，他来到了三大卷书面前，罗素看出这是他本人的巨著《数学原理》留存下来的最后一套了。管理员取出其中的一册，拿在手上翻了几页，似乎一时被其中奇怪的符号弄糊涂了，于是就合上书，书在他手上颠过来倒过去，他犹豫着……”

奥地利逻辑学家库尔特·哥德尔就是曾失去自信的数学巨人之一，而埃尔德什则尽力帮助他重树自信。普林斯顿高等研究院是这位逻辑学家从1935年到1976年间的主要栖身之处，埃尔德什和哥德尔就是在那里见面的。“哥德尔和我谈了很多，”埃尔德什说，“显然他的智力是一流的，即使不是他研究的领域，他也知之甚多，但奇怪的是他的著作很少，他本应能完成更多的研究工作。我常和他吵得不可开交”[19]，因为后来他的兴趣逐渐转向了形而上学，“我们对莱布尼兹(Leibniz)的研究颇多，我曾告诉他：‘人们研究你是因为你是个数学家，而不是因为你研究莱布尼兹。’”

1931年，25岁的哥德尔回到维也纳：他把数学大厦的基石击了个四分五裂，使整个科学界为之瞪目。他已设法证明任何已牢靠到足以包含算术定律的形式数学系统都不能证明其自身的相容性。他那篇题目不够贴切的论文“《论〈数学原理〉及相关系统中的形式不可判定命题》，按数学的基本原理把罗素的研究工作串连起来，所以罗素梦中的那个22世纪的图书管理员才把那本《数学原理》当作历史上的珍奇而不是永恒的数学真理了。罗素曾经给另一位逻辑学家弗里德里希·路德维希·戈特劳布·弗雷格(Friedrich Ludwig Gottlob Frege)致

命一击，如今罗素的研究工作的崩溃，也算是天报吧。

就在19世纪与20世纪之交，世界范围内掀起了研究数学基础的高潮。如弗雷格和罗素等一些数理逻辑学家试图以一种十分严谨的方式来建立数学体系。其指导思想是没有什么是当然的，用尽量少的无需证明的公理推导所有的数学问题，认为任何定理均可从第一性原理导出。比如，在建立新的初等算术中，他们由加法交换律出发，所谓加法交换律是指加数之和与各加数的顺序无关，即 $a+b=b+a$（而减法不满足交换律，因为 $a-b\neq b-a$）。他们甚至不厌其烦地指出，这样一些不言自明的命题乃是他们这种严谨方法的试金石。但他们走得比这更远，甚至明确地给出像4这样的一个个数的定义。按他们的正规思维方式，数是由集合定义的。比如，4这个数是什么？看看周围吧，弗雷格说，你会看见到处都是4，一副纸牌花色种数的集合，一张椅子的腿的集合，将这些所有具有4个成员的集合聚在一起构成一个大的集合——这个由集合所构成的集合就形成了“4”这个概念。

所有这些似乎应该有助于发现新的数学规律的辛勤劳动起因于几何领域里的一场危机，而数学家们则害怕这场危机会波及到算术领域。根据几何学中大量似乎显而易见的真理，譬如，两点决定一直线；所有的直角都相等；直线可以向两端无限延伸等，欧几里得在他的13卷巨著《几何原本》的五卷中证明了数百条有关平面上点和线的几何定理。例如，任意三角形内角之和均为180度。欧几里得并不仅仅把几何学局限在精确这个层次上，他以确定性代替了以往的不确定性。几个世纪以来，欧几里得几何和牛顿、达尔文(Darwin)、弗洛伊德(Freud)以及爱因斯坦等人的研究成果一样成为西方文化的精髓。“长期以来，《几何原本》被视为数学和其他学科的工具和楷模，也逐渐变成正规教育的基础课程，是每个青年学

生都要求掌握和消化的智力工具。”斯坦福大学的数学家罗伯特·奥瑟曼在《宇宙的诗篇》一书中说:“在一个充斥着谬论和怪谈的世界上,《几何原本》却闪耀着真理的光辉……令人惊叹的是,两千年后仍无人能够在这本巨著中找到一个‘错误’——也就是说,找不到一处不是根据给定假设条件进行逻辑推理的地方。”[20]

欧几里得几何学盛行了两千多年,但这个几何王国却常常后院起火。曾有人提出欧几里得几何中的一个公理,即所谓的平行公设,似乎并不是完全不需要证明的。平行公设是指过不在已知直线上的任一点有且仅有一条直线平行于已知直线。这无疑是正确的,但有少数几个大惊小怪的经验主义者虽然没有直说这个假设是错误的,却对此提出质疑:如何得知这两条直线在无穷远处不相交呢?法国数学家达朗贝尔(Jean Le Rond d'Alembert)在捍卫这条公理时,曾将这种质疑称为“几何界中的恶意诽谤”。而事实上,当数学家们开始尝试用相反的公理取代平行假设条件时,就已迹近于恶意中伤了。

1829年,尼古拉·伊万诺维奇·罗巴切夫斯基[Nicolai Ivanovich Lobachevsky,他在汤姆·莱勒(Tom Lehrer)的歌谣中被不公正地视为一个剽窃者,而事实上他并不是]凭着他那奇特的直觉提出,过已知直线外一点至少可以作两条直线平行于已知直线。1854年,黎曼竟提出了另一个反论:平行直线是不存在的,任何直线最终都会交于无穷远处!此类几何学(无论是罗巴切夫斯基的还是黎曼的)尽管与常理相左,却和欧几里得几何学一样,自身乃是前后一致的。换言之,就能否自圆其说而言,它们都是可以成立的。自不待言,这些新的几何学派与欧几里得几何学的定理直接发生抵触。比如,在黎曼几何学中,三角形内角之和小于180度,而事实上,三角形

内角和随三角形尺寸的变化而变化，当三角形尺寸越变越小时，内角和将无限趋近于180度。

"真无聊！"人们不禁这么想，"在现实中随便找一个三角形，用量角器测一下各内角的度数，不就知道三角形内角之和为180度了吗！""别那么自以为是了！"黎曼学派反驳道，"在现实世界中，你所测量的三角形都很小——要知道，在茫茫无边的宇宙中，即使是地球也不过是沧海一粟。而这就是你们所有的三角形内角和仿佛总是等于180度的原因。此外，就算局限在你周围的小范围内，考虑到测量误差的影响，你也不能肯定三角形内角和一定就是180度，而不是其他的什么度数，如179.99997度。"从学术角度看，该学派提出另一个假设以取代平行公式是一回事，而宣称实践已证明其正确无误的欧几里得几何学实际上不是大自然的几何学则完全是另一码事！这些非欧几里得几何学的观点充其量只能当作欧洲人茶余饭后的谈资罢了。

陀斯妥耶夫斯基（Fyodor Dostoyevsky）的《卡拉马佐夫兄弟》（1880年）一书中持怀疑论态度的那个弟兄伊万（Ivan），是欧几里得几何学的忠实捍卫者：

> 如果上帝是存在的，并且确实是他创造了地球，那么常识告诉我们，他一定是按照欧几里得几何学来创造这个世界的，而且他限定人类的思维活动仅仅局限于三维空间。但是仍有某些优秀的几何学家和数学家（过去有，现在还有）怀疑客观世界，甚至怀疑全人类都是根据欧几里得几何学创造出来的，胆敢认为两条平行线（欧几里得认为它们永不相交）会在无限远处相交。所以，我的朋友，我可断言如果我连欧几里得几何学都理解不了，我怎么去理解上帝？……即使两条平行线真的相互会聚，我也实际亲眼目睹了，我会为它作证，但我依然不能打心底里接受这一事实。[21]

当几何学界一片混乱之际，弗雷格等逻辑学家正致力于扶持算术的研究。1902年，弗雷格完成了他的得意之作《算术基础》第二卷，且即将付梓，前景灿烂，因为已出版的第一卷在数学界广受好评。然而就在此时，乌云遮住了阳光——他从罗素处得知在该书集合论中的集合概念存在一处无法避免的悖论，这一概念在他的著作中却至关重要。“一个科学家没有比自己的工作刚完成其基础便垮下来更不幸的事情了，”[22]弗雷格后来如是说，“正当我的著作就要付印的时候，我收到了伯特兰·罗素先生的一封信，它使我陷入了这种状况。”

罗素所说的悖论，“与一个古希腊神话有密切关系：埃皮门尼德斯(Epimenides)是克里特人，他认为所有克里特人说的全是假话，”如果埃皮门尼德斯的话是真的，那么他在说假话；但如果他在说假话，那么他的话是真的。“还有一例与上述埃皮门尼德斯悖论在本质上相似，”罗素在他的自传里写道，“给某人一张纸，纸的一面写着：‘这张纸背面的话是错的’，但当他将这张纸翻过来，却发现了同样的一句话：‘这张纸背面的话是错的’。看起来一个成年人似乎不应该把时间花在这些烦琐的事情上，那么我该做些什么呢？”[23]

对克里特悖论的思考启发了罗素：

> 一个类既可能是也可能不是它自身的一个组成成员。比如，由多个茶匙构成的集合显然不是另一个茶匙，而由不是茶匙的东西构成的集合却是一个不是茶匙的东西。似乎有不少正面例证，如所有的类构成的类是一个类……这使我想到了不是自身成员的类，它们似乎也构成一个类。于是我问自己，这样一个类是否是它自身的成员？如果它是其自身的组成成员，那么它应该具有由这个类的定义规定的性质，即它不是自身的成员；而如果它不是自身的一个成员，则它就不具有由这个类的定义规定的性质，因而它必须是自身的成员。于是以上两种

情况的每一种均走向自己的反面，从而自相矛盾。[24]

几年后罗素提出了他的悖论的流行说法。塞维尔的理发师替城里的所有不自己刮脸的人刮脸，那么，该理发师自己给自己刮脸吗？如果他自己刮脸，那么根据头一句话，他该不给自己刮脸；如果他不自己刮脸，那么根据同样一句话，他该给自己刮脸。弗雷格竭尽所能也未能解开罗素的由所有的类组成的类这一扑朔迷离的悖论。

希尔伯特这位当时数学家中的领袖人物倡导重整数学基础以便一劳永逸地清除数学体系中的悖论。希尔伯特说，"集合论中竟存在着悖论——我们曾经历过的这场梦魇一去不复返了。"对于当时的数学界而言，希尔伯特的话宛若一道福音。"没有什么数学问题是不能解决的，"他说，"对此我们都心悦诚服。无论怎么说，当我们专心致志于一个数学问题时，最引起我们兴趣的一件事准是我们在内心之中总是听到一个呼唤：问题在这里，找出它的答案，全凭思考你就能找到它，因为在数学中没有笨蛋。"[25]

罗素和怀特海响应了希尔伯特的号召。与他们的前人弗雷格一样，试图以3卷宛如天书的《数学原理》为基石，从第一性原理建立起整座数学大厦。《数学原理》的第一卷于1910年出版。这项工程顺利地进行了20年，直到年轻的哥德尔使它搁浅了。

哥德尔证明，任何复杂的数学体系都不是绝对完全的。换言之，无论选用什么样的公理，总能造出一些有意义的数学命题不能在该系统内证明它们正确抑或错误。这样一来，一些埃尔德什给予很高评价的问题以及其他数学家悬而未决的推测就不能通过逻辑推理得到证明了。哥德尔的第二个发现更是令人泄气，他证明了任何给定的复杂数学体系的相容性是不可能得到证明的，也就是说，你不能确定体系内的定理是

否自相矛盾。在里克特(Richter)的数学重大发现排行榜上,哥德尔的发现位列第十。数学体系并不完全,还有可能不相容,这对那些认为数学是逻辑性最强的逻辑体系的人(在数学领域很少有人不这么想)来说无疑是个严重的打击。尽管有哥德尔提醒,许多地道的数学家们仍坚持认为数学事实上是具有相容性的,虽然他们现在已知道这一点不可能得到证明。正如数论家安德·韦尔(André Weil)所说的:"因为数学具有一致性,所以上帝与我们同在;因为我们不能证明这一点,所以魔鬼亦与我们同在。"

埃尔德什是韦尔阵营中的一员,他坚信数学具有一致性。至于完全性,有许多重大的问题源源不断地出现,经过殚精竭虑,这些问题都被攻克了,但万一有那么几个涉及完全性的问题在理论上得不到解决,那怎么办?埃尔德什现在解题非常顺利,以至于无需顾忌他的事业的哲学基础了。

另一方面,罗素这时却被搞得焦头烂额:

> 我曾渴望确定性如同人们渴望宗教信仰,我曾想数学该是这世上最具确定性的学科,但我发现老师传授给我的许多数学证明充满了谬误。我脑海中不断浮现出大象与乌龟的寓言故事。我曾构建一头大象以使数学王国有一个安静的憩身之地,可是却发现大象摇摇欲坠,于是又构建一只乌龟以使大象不致摔倒,可是乌龟并不比大象更稳当,于是,经过大约 20 年的艰苦工作,我终于明白,在令数学知识变得无可置疑方面,我实在是束手无策。[27]

虽说哥德尔是个天才,但他的头脑并不太清醒。也许是鬼迷心窍,加上他总疑心自己有心脏病,在他成年后,他因过度抑郁和焦虑而数次进入疗养院。他在饮食方面很小心,但他年纪渐老,就吃得越来越少,而且只吃他妻子阿德勒(Adele Gödel)送来的食物,唯恐有人对他下毒。到 64 岁时,他的体

重仅86磅(约39千克)。1977年年中阿德勒因动大手术住院后，他竟完全停止进食，次年1月活活饿死，享年71岁。在他临终的那些日子，他总是担心他毕生的心血会遇上比塞维尔的理发师那样的悖论更有过之而无不及的东西，唯恐罗素梦中的未来的图书馆管理员会把他的工作捣毁为一堆垃圾。

哥德尔并非是研究院里唯一将自己所研究的课题的基础翻了个个儿的科学家,他的同事兼朋友爱因斯坦在他从事的物理学领域里,不但曾经推翻过原有的定论,而且推翻过不止一次。爱因斯坦发现光并不当真是波,而是由不连续的粒子所组成。他证实了物体不能被无限加速,它屈从于我们宇宙的一个基本限制,即物体的绝对最高速度是光在真空中传播的速度,即每秒186 282英里(299 793千米)。他揭示了时间的相对性原理,也就是说时钟的速率因放置地点的不同而不同。正是爱因斯坦和数学家赫尔曼·闵可夫斯基(Hermann Minkowski)得出了这么一个有违常识的结论:我们不是生活在欧几里得三维空间中,而是生活在四维空间里。

当19世纪欧几里得的平行假设遭到否定的同时,四维的可能性就第一次被提出来了。平行直线是否相交的争论引发了其他几何热点问题。如果尽管看来并非如此,但若三角形内角之和真的并非等于180度,那么人们就会对自己的感觉产生怀疑:怎么能相信自己是生活在三个维度而不是四个维度之中呢。1884年,埃德温·阿博特·阿博特(Edwin Abbott Abbott),这位杰出的神学家和莎士比亚学者,匿名再版了《平面国》,该书一方面对维多利亚女王时代上层人物(他们的等级观点鲜明,歧视妇女)的一维论进行了辛辣的讽刺,另一方面通过对陷身二维世界的人的怪诞想象,对第四维进行了大胆的设想。

"我之所以称我们生活的世界是平面国,"阿博特的小说就是这样开始的,"并非因为我们在日常生活中这么称呼它,而是想使我亲爱的读者,你们这些有权生活在空间中的人们,能对我们二维世界的性质有更清晰的认识。"[28]想象有一群囿于二维平面里的像"烙饼"一样的异类智能生物,他们不但身体是二维的,就连思维也是二维的,他们不能感受"离开"他们生活的二维平面的任何东西。假使有一个球降落到平面国并穿过它,那么平面国人会有什么样的感受呢?他们不会感觉到它的逼近,也不知道它是立体的。首先他们觉得它是一个点(当球刚与平面相切时),而当前半球切入平面时,点就变成一个越扩展越大的圆圈,当后半球通过时又渐渐收缩成一点,并最终消失。当来自空间国(三维世界)的使者告诉平面国人第三维存在的证据时,他们勃然大怒,认为纯属无稽之谈——与其后当空间国人面对第四维存在的证据时的表现如出一辙。

在一次聚会上,有人看见埃尔德什正弯腰坐在沙发上潜心研究《平面国》,这本书也许是他成年后完整地读完的唯一一本幻想小说。即使爱因斯坦给出了有力的佐证,第四维的概念仍为常人难以接受。1920年,著名物理学家阿瑟·爱丁顿(Arthur Eddington)爵士承认:

> 无论四维世界在理论上是多么成功,我们很难否认在我们心中总有一个声音在说:"在你的潜意识里,你认为第四维完全是胡说八道。"我认为持有这种想法的人在物理界学史上大有人在。那些四维理论家们胡说什么我正在写字的桌子是在空空荡荡的空间中高速运动的电子集合体,这空间的大小与电子的大小之比和行星与太阳系的比例相当;他们还胡说什么稀薄的空气具有每平方英寸14磅(约每平方厘米0.98千克)的压力,这足以压扁我们的躯体!他们胡说我现在通过望远镜看到的星团

其实是50 000年前的星团！我们别再被这些胡说八道所蒙蔽了，它是不可信的……[29]

爱因斯坦在普林斯顿高等研究院的那些年，从 1933 年到他 1955 年去世，一直试图创建统一场论，该理论企图将引力和光当成同一现象在不同条件下的表现形式，但未能取得最终结果。他还致力于微观物理学中量子力学基础理论的研究。虽然他是反直觉之王，但他一直没放松量子力学中存在的悖论，比如著名的海森堡不确定原理，即不可能同时准确测量粒子的坐标和速度。极而言之，该原理就是：如果你十分精确地测到了该粒子的速度，你就无法确定该粒子到底处在宇宙中的哪个位置。基于这种对应关系，爱因斯坦曾祈灵于神，一针见血地指出："上帝决不会和宇宙玩掷骰子。"

爱因斯坦和哥德尔是很要好的朋友，和埃尔德什一样，爱因斯坦也曾尽力帮助哥德尔摆脱信心危机，成功地促使他将精力转移到相对论的研究中，这段时间相当长，使他有可能完成一篇重量级的论文。然而爱因斯坦主要是想使哥德尔摆脱困境。哥德尔患有妄想症，到处挑刺，不仅在数学上如此，在其他被奉为神圣的学科上也不例外。当时哥德尔正在准备美国公民资格考试，读美国宪法时他确信自己发现了一个漏洞，该漏洞正是一块可能滋生独裁者而不是民主总统的土壤。为此哥德尔大为恼怒，因为他来美国的初衷就是为了躲避像墨索里尼和希特勒那样的独裁者。在哥德尔进行公民资格口试时，爱因斯坦不得不打断他的谈话以阻止他向考官说出他那骇人听闻的发现来。[30]

埃尔德什虽然没有与哥德尔或者爱因斯坦合作过，但他经常和他俩在研究所小聚。"他们并不认为埃尔德什是最棒的，"埃尔德什笑着说，"我也并非是爱因斯坦的密友，但我很了解他。有一次在他家吃午饭时，我向他解释素数理论。当

然，他对它有所了解，并给予高度评价，但他对于具体细节并不感兴趣。”爱因斯坦的物理研究数学味很浓，在近代物理学中最著名的质能方程 $E=mc^2$ 便是他的杰作。该方程揭示了质量和能量的内在联系（式中 c 为光速），它们是等价的。埃尔德什和爱因斯坦交谈的内容大多是关于政治方面的。在1940年，爱因斯坦用于谈论政治的时间甚至比他用在物理研究上的时间还要多，这使他很是不快，“我们不得不为谈论政治和研究方程划分时间，”爱因斯坦告诉他的数学助手恩斯特·斯特劳斯（Ernst Straus），“但对我来说，方程更重要一些，因为政治不过是现在关注的事情，而数学方程却可以流传千古。”[31]

“我认为没有爱因斯坦原子弹照样能造出来，”埃尔德什说，“他是为原子弹的研制提供了理论基础，但没有相对论原子弹也一样能造出来。我记得我曾在 1945 年问爱因斯坦：‘40 年前你想到过你的质能方程 $E=mc^2$ 会在你有生之年得到应用吗？’他说：‘我没料到。我曾想最终也许会得到应用，但没料到会那么快。’”这两人还探讨过宗教问题。“我知道爱因斯坦绝不信奉人格化的上帝，”埃尔德什说，“因为我问过他。”[32]

埃尔德什和恩斯特·斯特劳斯之间的关系要比他和爱因斯坦的关系密切得多。斯特劳斯的遗孀路易斯（Louise Straus）是 1944 年在研究院首次和保罗见面的，“我还清楚地记得当时的情形，”53 年后她笑着说：“当时是我们三个人在一起，当恩斯特去为爱因斯坦工作时，他让我和埃尔德什单独在一块。我很快就知道埃尔德什很难安安稳稳地坐下来，尤其是在他做着数学题时。而当我照料他时，他正在猛攻数学——也就是说，他在普林斯顿的大街上走来走去，挥舞着双手，旁若无人地比划着。显然做手势有助于几何概念的形象化。可是我

无论是在数学思路上,还是在行走的步伐上都跟不上他,他走得很快,跟着跟着,我发现我找不着他的踪影,把他跟丢了。我很担心,因为我不知道如果我把一个20世纪最伟大的数学家弄丢了的话,我丈夫会怎么想,但最终我还是找到了他。他正站在一堵墙边,以头撞墙。他告诉我他头痛得厉害,显然他是用脑过度。"

路易斯和恩斯特·斯特劳斯当时正值新婚燕尔,但他们的蜜月在普林斯顿提前结束了,因为恩斯特刚开始为爱因斯坦工作。这位伟大的物理学家需要用数学来验证他所做的研究工作,于是研究院就答应给他配一名助手。"通过爱因斯坦的一个熟人的一再举荐,恩斯特前来应聘这个职位,"路易斯·斯特劳斯回忆道,"面试情况似乎还行,但有一点恩斯特觉得非说明不可:'我必须坦白告诉您,我对相对论一窍不通。'爱因斯坦笑着回答说:'这没关系,我懂相对论。'最终恩斯特得到了这份工作。从1944年到1948年间他一直为爱因斯坦工作。当时我们没有电话,爱因斯坦是用电报来传达他的思想的。用电报传送相对论的细节也许就仅此一例吧。"但更多的时候爱因斯坦是在研究其他方面的问题,因为他早在40年前就构思出了相对论的大体框架。"每天早晨我丈夫都是先顺路去爱因斯坦家,他家位于梅塞大街,"路易斯·斯特劳斯说,"然后他们一起步行去研究院的办公室。"爱因斯坦的办公室很大,很漂亮:精美的地毯,精致的大办公桌,宽敞的窗户。但他不愿在那儿工作,他宁愿和恩斯特一起在他办公室后面用小幕布隔出的一间小屋里工作。当时我正在哥伦比亚大学攻读我的数学学位,他说我可以用那间办公室,于是我就坐在他的大办公桌后学习。但这对我却没有什么好处。有时研究院的领导会领着各界名流前来拜会爱因斯坦,却发现是我坐在他的位置上。恩斯特和爱因斯坦会一直工作到吃午饭的时

候，然后爱因斯坦就回家去，下午恩斯特会继续完成上午的计算，或者和研究院里的其他客人，比如保罗·埃尔德什一起做数学题。

“和我第一次遇到他时一样，埃尔德什喜欢踱步。几年后，当我们搬到加利福尼亚后，我们养了一只爱尔兰塞特狗，这只小东西在埃尔德什散步时喜欢在他跟前撒欢，但埃尔德什由于思考问题过于专注，往往忽略了它的存在。记得有一次我们一起从澳大利亚飞往洛杉矶，在漫漫旅途中，他竟然在过道上走来走去，挥舞着双手，探索着数学的奥秘。旅客们在整个旅程中一直诧异地望着他。后来当我们到家后，恩斯特和我都觉得累了，要早点休息，可他头脑格外清醒，想要继续做数学题，再干一个通宵。

“我们在研究院的住处是座旧军营，埃尔德什则住在我们对面的单身宿舍里，和另外8个人合住一个寝室。有一次，恩斯特问起他的室友都是些什么人，他答道：‘是些不值一提的人。’‘不值一提的人’是指他们都不是数学家。当他和那些不值一提的人住腻了的时候，他就会到我们家来，然后我们就不知道他究竟要呆多久了。我常在深夜听到哐啷一声巨响，那是埃尔德什在开窗户。由于上下拉窗没有曳绳，开窗拔开插销时，如果不用手扶着，窗户就会直直地砸下去，发出巨响。他人是很聪明，可就是想不到轻轻地把窗户放下。他真是个心不在焉的教授。他甚至不会使用淋浴器，不会把水龙头关上，水冲到地板上，结果油毡起皱了，门也关不上了。他去公用电话亭能彻夜不停地往里塞硬币，给世界各地的数学家们打电话，或是叫附近的朋友到我家来，‘我在斯特劳斯家里。’他这样告诉他们。他从不先问问我们是否欢迎更多的客人。当然他也只邀请数学同行们来，而且我丈夫喜欢他这样做。他们忙于分析各种各样的观点，从中也产生了许多数学成果。

要是恩斯特还活着，他就会告诉你这是数学史上多少激动人心的时刻啊。当时研究院正处在令人振奋的时期，埃尔德什不断激起新的研究浪潮；爱因斯坦总是激励人们；冯·诺伊曼正着手组装第一台计算机。

“1948年，当时埃尔德什仍和我们在一起，住在普林斯顿。我丈夫患上了糖尿病，需要注射胰岛素。保罗也想注射胰岛素试试。当然我们不能让他这样做，他为此大发雷霆。那是对科学的好奇心促使他奋不顾身地想要试试。当时恩斯特和我正在学开车，因为我们想驾车横穿美国，所以就买了辆旧车。保罗也想开车，但我们没让他开，我们想，如果他开车的话，结果是可想而知的，必将以出车祸而告终。但他又很想开车，我们常为此争执不休。他真是固执透顶。

“就在1948年夏天，在我们移居加利福尼亚之前，我们举办了一个小型告别会，埃尔德什老是系不好鞋带，于是他在聚会上伸出了他的脚，请别人替他系鞋带。朋友们开玩笑说我们搬去加利福尼亚不过是为了摆脱他。”

恩斯特·斯特劳斯是为数不多的能有机会直接观察到物理学大师和数学大师之间风格差异的幸运儿之一。在给埃尔德什七十寿辰的贺词中，斯特劳斯说，“爱因斯坦曾对我说过他之所以选择物理学而不是数学作为他一生奋斗的事业，是因为数学中有太多绝妙而又令人心醉神迷的问题，一个人很容易为之耗尽毕生精力最终却连核心问题的边也没摸着。而对于物理学，他有着某种奇特的‘嗅觉’。他认为对于一个科学家而言，首要任务是解决核心问题，而不为其他问题所动——无论那些问题多难，多么具有诱惑力。埃尔德什完全违背了爱因斯坦的这一番话，但他却取得了成功。他几乎痴迷于他所遇到的每一个难题，并成功解决了其中的大部分。这使我明白了一个道理：在追求真理的征途上，无论是唐璜式

的人物，如埃尔德什，还是加勒哈德*式的人物，如爱因斯坦，都有成功的机会。”[33]

■

1948年12月2日，在异乡漂泊了10余年的埃尔德什终于回到了故乡的怀抱。这次布达佩斯之行对他来说可谓是喜忧参半。他的许多朋友和亲戚都已离开了人世，所幸的是他母亲和密友保罗·图兰仍健在。也就是在那时，他遇到了图兰的未婚妻薇拉·索斯和一个5岁的神童米克洛斯·西莫诺维茨(Miklós Simonovits)，他们后来都成了他最亲密的合作伙伴。由于斯大林为了开展笔迹审查运动而开始封锁边界、围捕公民，埃尔德什不得不提前结束了他的故乡之行。

1949年2月，埃尔德什逃离了匈牙利，在随后的3年中，他往返于英国和美国，居无定所。直到1952年，他才与圣母玛丽亚大学签下一份灵活的合约，他需承担一个班的教学任务，此外学校还给他配备了一名助手，以免他一时心血来潮想与他人合作完成一个证明时有所接替。虽然埃尔德什拒绝参加有组织的宗教活动，但他并不介意在一所天主教学校里任教。“唯一让我颇费脑筋的是，”他开玩笑说，“学校里有太多的‘加号’。**”[34]后来，圣母玛丽亚大学要以同样优厚的条件聘他为终身教授。“他的朋友们力劝他答应下来，”梅尔文·亨里克森回忆道，他是在埃尔德什40岁生日宴会上与他见面的，当时埃尔德什逢人就说：“死亡从40岁开始。”

---

* 加勒哈德(Sir Galahad)，亚瑟王传奇中的圣洁骑士，因品德高尚纯洁而得圣杯。——译者

** 指十字架。——译者

"刚40岁他就开始抱怨说上帝已有一只手搭上了他的肩膀,"他的一个同事的遗孀回忆道,"我反驳他说:'保罗,如果你才40岁时感觉就如此之糟,当你50岁时又会如何?'他立即悲伤地说:'更糟。'"

他的朋友们都劝他。"我们对他说,'保罗,你那走江湖数学家的生涯究竟还要再维持多久?'出乎我们的意料,"亨里克森说,"他的回答是——起码40年。"[35]埃尔德什拒绝圣母玛丽亚大学的邀请是因为他不想被一个长期职位应承担的责任所约束。

到了6月份,埃尔德什想给远在匈牙利的母亲打电话祝她生日快乐,令他懊恼的是,他的朋友们都唯恐用他们的电话给一个共产主义国家打电话。当时美国正处于红色恐惧之中。

"我的问题也就随山姆和乔开始了。"埃尔德什说,"由于乔的关系,我不想回匈牙利。1954年我被邀请参加一个在阿姆斯特丹举行的国际数学会议。当时正处于麦卡锡时代,山姆不想给我再入境许可证。移民局的官员们问了我各种各样愚蠢的问题:'你母亲是否对匈牙利政府有很大的影响?你读过马克思、恩格斯或是斯大林的书吗?''没有。'我答道。'你对马克思如何评价?'他们追问。'我没有资格对他说三道四,'我说,'但毫无疑问他是个伟人。'他们的问题中只有一道题不是明智问题:'离开匈牙利容易吗?'其实他们知道答案是否定的,但他们就是想听听到底我会怎样作答。'不容易。'我说,'我现在还不想访问匈牙利,因为我不知道他们是否会让我返回来,我只是计划去英国和荷兰。'"

虽说移民局官员对埃尔德什对马克思的评价不太满意,但他对另一个问题的回答更使他们挠头。"'如果你能肯定匈牙利政府会让你离开,你会访问匈牙利吗?'他们问。我说:

‘那当然了，我妈在那儿，还有好多朋友也在那儿。’但是在麦卡锡时代，你是不可以承认你想去一个共产主义国家的。”

于是他们拒绝给他再入境签证，他请了一名律师提出上诉，结果被驳回。“法院没有说明任何理由，”亨里克森回忆道，“但他的律师被允许查阅了埃尔德什的部分档案资料，结果发现档案上记录有他曾与一位姓华的中国数论学家有联系，华于1949年辞去了在伊里诺伊大学的职位回到了红色中国(附有一封埃尔德什的典型信函：亲爱的华，设 p 是一个奇素数……)，此外他还曾卷入长岛的雷达站事件中，当时他是在与两名外国人讨论数学问题。”[36]那些官员显然害怕寄给华的信中宛如天书的数学符号可能是密码。

埃尔德什辞去了他在圣母玛丽亚大学的职位，同时被吊销了美国绿卡，前往阿姆斯特丹。“对于埃尔德什来说，”亨里克森说，“被剥夺了旅行的权利就像是被剥夺了呼吸的权利一样。”他永远不想受到约束，“我没取得再入境签证就离开了美国，”埃尔德什说，“我想我这样做完全是按着美国最优良的传统行事：你不能让自己任凭政府摆布……好多年我都未能回去。”

“在麦卡锡把埃尔德什踢出美国后，我在欧洲遇到了他。”安妮·达文波特在大约40年后回忆说，“在乘出租车回家的路上，他想要找点东西。他带了两只行李箱，这就是他的全部家当。他把两只箱子都打开了，但每只箱子都只装了三分之一，他所有的财产都在这里，但没有一件值得一提。我们到家后，他要我给他在布达佩斯的妈妈打个电话，我问他她的电话号码是多少，他说她还没装电话。于是我问他希望我打给谁，他说她邻居有一个电话。我就问他这个邻居的电话号码，‘我不知道，’他说，‘这得指望你去查出来。’”

埃尔德什是个乐观主义者，他希望西欧国家能在使他旅

行不受限制方面比山姆大叔更宽容些。但他在那儿同样受到了阻滞。使他大失所望的是，荷兰只给了他有效期为几个月的签证，而英国也不见强，那些国家也都不喜欢他与红色中国亲善。最后，以色列同意他在耶路撒冷的希伯来大学做3个月的访问学者，使他摆脱困境。正是在这儿，他必须付出第一次现金奖20美元，作为解答他的一个悬赏题、一个吊人胃口的集合论问题的奖赏。此后，他便居住在以色列，但他拒绝加入以色列国籍的建议并保留匈牙利护照，宣布他自己是个世界公民。

1955年，也就是斯大林逝世两年后，埃尔德什在密友们的多方奔走和呼吁下，终于得以访问匈牙利。他的朋友们通过论证埃尔德什是世界数学文化的瑰宝而说服匈牙利政府颁给他一个特别护照，证明他是匈牙利公民但拥有以色列居住权（他母亲也去匈牙利政府为他疏通关系：虽然她对政治并不热心，但共产党政府还记得她没有参加1919年颠覆贝拉·库恩政权的反革命暴动，认为她是一个好人）。于是埃尔德什得到了专为他颁发的特别护照，允许他自由出入匈牙利。1956年，又一个由苏联扶植行将统治匈牙利长达32年的人物雅诺什·卡达尔（János Kádár）上台，他重新确认了埃尔德什的特别护照的有效性。

于是埃尔德什和乔（或称雅诺什，这是他对1956年后的匈牙利的称呼）重归于好，只要他愿意，他可以随时见到母亲，他又可以和匈牙利同事合作了。他和图兰在合作之余，以改写匈牙利古诗自娱。"他们'作品'的主题，"雅诺什·帕克说，"是他们最害怕的事：年老体衰。"[37]埃尔德什最喜欢背诵其中的两行诗：

> 有一个念头令我不安，我或将死亡
> 在日渐严重的早老性痴呆症中。

“埃尔德什知道自己不善于记名字,”格雷厄姆说,“但他常说,要是有朝一日他连早老性痴呆症这个词都忘了的话,麻烦就真的找到头上来了。”

原书空白页

第 3 章

爱因斯坦与陀斯妥耶夫斯基

我欠埃尔德什最大的一笔债源于30年前在罗马的帕科德·普林西比宾馆的一次谈话。他走近我，出乎意料地邀请我，"盖伊，一起去喝杯咖啡，好吗?"我并不爱喝咖啡，但我对这位伟人为什么会单单邀请我感兴趣，每杯咖啡1美元，在现在是很一般的，但在当时也算是小小的奢侈了。当我们喝着咖啡时，保罗说："盖伊，你是个大富翁，借我100美元吧。"

我很诧异，不是因为他要借那么多钱，而是因为我竟能满足他的要求。这又一次证明，埃尔德什比我还了解我自己。打那时候起，我就意识到我已拥有了无尽的财富：不只是指在物质方面我拥有我想要的，更是指在精神方面，我拥有数学知识和认识了埃尔德什。

——理查德·盖伊

1959年，埃尔德什借山姆的政策有所松动之机，拿到一张特别签证，得以参加在科罗拉多州博尔德举行的数论会议，签证要求他必须随时有一个数学同行陪伴(这根本不算什么负担，因为那就是他的唯一伙伴)，而且会议结束后他必须立即离开美国。

"1959年夏，当我从美国开会回来后，"埃尔德什回忆道，

"我得知当地有一个小男孩,已经掌握了现有的全部中学课程,他的母亲也是数学家。我很感兴趣,于是第二天便邀他共进午餐。当我们吃午饭时,[路易斯·]波绍(Louis Pósa)喝着汤,我告诉他下面这个问题:试证,在不大于 $2n$ 的 $n+1$ 个整数中必有两数互素。这个简单的结论是我在好多年前发现的,但我花了10分钟才找到一种简洁的证明方法。"

比如,取 n 为5,那么你若从1,2,3,4,5,6,7,8,9,10这个集合中任取6个数,则其中必有2个数互素(也就是说这两个数没有大于1的公约数)。但如果你只取了5个数,则推论不成立:在这10个数中有5个偶数,2,4,6,8,10,显然它们有一个公约数是2。

路易斯先把汤喝完,然后宣布:"取其中相邻的两个数。"换言之,若取连续的两个数,则这两个数必互素。"在不大于 $2n$ 的 $n+1$ 个整数中,"埃尔德什说,"必有两数连续,因而它们互素。"不用说,埃尔德什是"大为震惊"。在一次报告中,他讲完这段往事后,一个说话风趣的人评价道:"在当时,也许香槟要比汤更合适些。"埃尔德什认为波绍的喝汤证明表明这个12岁的小男孩足以和当年的高斯相媲美:高斯10岁时就巧妙地迅速算出了从1到100的所有整数之和。

埃尔德什对波绍百般呵护,他们经常见面,而埃尔德什的母亲老是塞给波绍蛋糕和饮料。"他刚过13岁,"埃尔德什说,"我就给他讲解拉姆齐原理,"并提了一个包含无数个点和无数条边的图形问题。埃尔德什要他找出该图的一个无穷子集,使其中的点全都相连或全都不连。这其实是将聚会问题推广至无限时的情形。即与会人数为无穷的聚会中,是否总能找到一个无穷子集,使其中所有的人或者两两认识,或者两两互不认识?"波绍花了15分钟才弄清了题意,"埃尔德什说,"然后他回家了,想了一个晚上,最终在他人睡前找到了证

明方法。

"波绍快到14岁时,你就可以把他当作成年数学家来讨论问题了。我打电话给他,问他一个问题。如果是关于初等数学方面的问题,很可能他会发表一些贴切的、颇有见地的看法。有意思的是,应当指出,他的计算能力有些欠缺,而且他从来没有喜欢过几何学。我尽量给他一些初等几何题,但他不感兴趣。他总是只喜欢做他真正感兴趣的事,而且做得非常出色。"

波绍14岁时便和埃尔德什合作完成了他们的第一篇论文。当他15岁时,便在图论方面完成了他最著名的工作。但他20岁时便停止了证明和猜想,改做小学教师去了。"我觉得非常可惜,"埃尔德什说,"他虽然活着,但无异于行尸走肉,我非常希望他能尽快真正活过来。其实当他16岁那年告诉我他宁愿做陀斯妥耶夫斯基而不做爱因斯坦时,我就开始隐隐有些担忧了。"

年轻的波绍还为姑娘们而心烦意乱,这也影响了他的数学研究。他问埃尔德什为什么"年轻的女数学家"那么少,埃尔德什告诉他,"假若小奴隶们总是怀着'他们要是太聪明了,主人会不喜欢他们'这样一种想法而长大的话,那么还会有许多男孩做数学题吗?"波绍承认不会有太多。

即使埃尔德什不能在姑娘问题上对他有所帮助,他也会引导他尝试别的乐趣。"在匈牙利,许多数学家喝浓咖啡,"埃尔德什说,"在数学研究所,他们做的咖啡可真不赖。当波绍还不到14岁时,我给了他点咖啡,他加了很多糖然后把它喝了。我妈对我给这么小的孩子喝浓咖啡大为光火,我回答道,波绍会这么说,'夫人,我做着一名数学家所做的工作,喝着一名数学家所喝的饮料。'我曾在多年前的一部电影里看到,当一位女士看到一个16岁的男孩正和一个年纪大一点的男人

一起喝着威士忌时，她大为震惊，可男孩说，'夫人，我做着一个男人所做的工作，喝着一个男人所喝的饮料。'"

波绍是一个实验班的首批学生之一，该实验班专为有数学天赋的学生而设，施行特别的中学教程。他很喜欢这个实验班的课程，即使是在他的学习成绩允许他提前两年进入大学之后，他仍留在那儿继续学习。他告诉埃尔德什："我们班有不少男孩的初等数学比我好。"

拉斯洛·洛瓦斯(László Lovász)就是波绍所说的男孩中的一个，他日后因在组合数学中的突出成就而名声大振，并且和埃尔德什合作了 7 篇论文。洛瓦斯很晚才开始从事数学研究，埃尔德什说，"都快 17 岁了才起步，这个年龄对于搞数学的人来说已经很晚了。当洛瓦斯还是个 ε 时，大概是在上高一的时候，他和他的同学，一个小数学家，向同一个小主人求爱，就一般的'主人'来说，她也是个不错的小数学家。她选择了洛瓦斯，"后来他们终成眷属。但埃尔德什指出，如果加上小主人的一段话，这个爱情故事就更精彩了："我愿意选择证明出黎曼假设的那个人(做我的丈夫)。"[1]

埃尔德什以在全世界发掘神童为自己的使命。约瑟夫·佩利坎(Jòzsef Pelikán)和埃尔德什初次见面时才 15 岁，他谈及埃尔德什是这样培养年轻人的："把一个个问题连珠炮似地砸向我们，好像我们是职业数学家似的。"[2]他的付出得到了回报，虽然在他的培养对象中有少数几个，如波绍，过早地"夭折"了，但其他不少人日后成长为我们这个时代数学界的领袖人物。

埃尔德什不光喜欢有数学天赋的孩子，所有的孩子他都喜欢，对他的同事的 ε 更是倍加宠爱。"人们常拍下我抱着婴儿的镜头，"他说。有一张照片上，"婴儿显得心满意足，人们都说，'埃尔德什叔叔是个好保姆。'"而且孩子越小，他们间的

关系越亲密。

亚历山大·伊维奇(Aleksandar Ivic)有个2岁的女儿,名叫娜塔丽娅(Natalija)。[3]有一次,伊维奇和埃尔德什带着她一起去贝尔格莱德公园。到了公园,他俩就坐下来揣摩起素数的分布问题来。正谈着,伊维奇忽然想起有件急事要去处理,埃尔德什就主动请缨由他来照看孩子,于是伊维奇怀着忐忑不安的心情把孩子留给他,然后走了。等他办完事回来,公园已空无一人,"没有埃尔德什,没有娜塔丽娅,"他回忆道,"我觉得要吐,我找遍了整个公园,一遍、两遍、三遍……恐惧渐渐袭上了我的心头,种种不祥的预感也接踵而至,萦绕在我的脑海:死亡、拐骗、车祸……"当他正准备报警时,却看到他们就在马路对面,"他们慢慢地走着,娜塔丽娅抓着埃尔德什的手,他们似乎正交谈着什么(直到现在我还没弄清他们是用什么语言相互沟通的),互相微笑着。"娜塔丽娅的另一只小手里拿着糖果,他们看上去是那么的惬意。"我向他们跑去,一把将他俩紧紧地抱住。'你本不应该为我们担心的,'埃尔德什腼腆地笑着说,'与孩子相处,我自有一手。'"

他对数学是过目不忘,对孩子也是如此。"当他向一个有4个孩子的父亲问及'ε们都还好吗?'时,并不是说他记不清这4个孩子的名字,恰恰相反,他不仅知道孩子的名字,还知道他们各自的年龄、曾患过的疾病,"以及他们经历过的大事,"凡事种种,不胜枚举,"[4]佩利坎说,后者目前是布达佩斯厄特沃什·洛兰德大学的图论专家。

埃尔德什很富有同情心。1945年,迈克尔·戈隆布在费城富兰克林研究所为政府从事战时服务工作,有一天接到埃尔德什打来的电话,说他正路过费城,想和大家一起聚聚。而戈隆布当晚要赶去一个数学同行家参加晚会,便邀请埃尔德什同去,言明此公也很想见他,如果他能赏脸光临的话,必定

会很高兴。后来埃尔德什确实去了,但与大家刚打了个照面,还没来得及与众位数学家们详谈,便不见了踪影。"我们在晚会剩下的时间就再也没见到他,"戈隆布回忆道,"直到人们快要散去时,我们才知道原来埃尔德什得知我们的主人有一个双目失明的老父亲,不能来参加晚会,孤零零地呆在楼上的一个房间里;于是埃尔德什宁愿放弃与数学同行共度良宵的机会,而去楼上陪伴那位孤独的失明老人。"[5]

彼得·温克勒也发现了埃尔德什的同一侧面。当时埃尔德什正在埃默里大学教书,"我们有一个非常聪明的学生,可惜患有脑瘫,人坐在轮椅里,"温克勒说,"当保罗第一次见到他时,便立即跑上前去,询问他的病情和预后状况。埃尔德什在10分钟内对这个学生的了解比我们在他整个研究生学习期间对他的了解都要多。此后埃尔德什对这个学生的研究工作很是关心——当时该生正在完成他的博士论文,提了许多中肯的建议。这很了不起。诸如此类的事情在他的一生中不胜枚举。"

■

20世纪60年代初期,埃尔德什屡屡向美国政府提出入境申请,并附上一封封大学校长、学术界名人甚至美国参议员的声援信,但均告失败。"他的要求一次又一次被无情地拒绝,"[6]迈克尔·戈隆布说,"我在大约1961年或1962年曾收到他的一封信,信上说,最近有个美国领事向他许诺他可望很快得到入境签证。但几周后他却不得不取消了他的访问计划——承诺被抵赖了。他按照他独特的表达方式写道:美国国务院制定对外政策对于以下两点是毫不动摇的:不允许红色中国进入联合国;不允许保罗进入美国。"

1963年夏，恩斯特·斯特劳斯和约翰·塞尔弗里奇（后者与埃尔德什在10年前会过面，数论专家）征集了几百位数学家签名，向美国政府强烈要求国务院允许埃尔德什重新入境。"他11月份可以回来，"塞尔弗里奇说，"正好是在肯尼迪被暗杀前。""山姆终于肯接纳我了，"埃尔德什说，当时他已年届50，"因为他认为我如今已是老朽不堪，已不足以推翻他了。"（但他和政府的问题还没完，他每年至少回布达佩斯一趟，直到1973年在莫斯科政府的压力下，卡达尔禁止以色列籍数学家参加为庆祝埃尔德什60寿辰而在匈牙利凯斯特海伊举行的集合论会议。埃尔德什对此大发雷霆，宣布将抵制他自己的生日晚会。他最后还是去了，但以后为了表示抗议，他拒绝再回到匈牙利。直到1976年，接到薇拉·索斯的通知后，他才停止了抵制行动，回到了匈牙利，来到儿时的朋友保罗·图兰的床边，图兰不幸身患癌症，已是奄奄一息。）

1964年，埃尔德什的母亲，以84岁的高龄开始陪着他东奔西走。在随后的7年中，她处处陪伴着他（除了去印度，由于她害怕感染上疾病而没有和他同行）。他母亲并不喜欢旅行，而且她甚至连一个英文单词也不懂。而埃尔德什经常去英语国家旅行，但她还要和他在一起。当他研究数学时，她就安静地坐着，为他的数学才能而感到欣慰。他们每天共进三餐，晚上埃尔德什会坐在她床边，握着她的手，直至她入睡。"保罗就是她的一切，"他的表妹弗雷德罗回忆道，"他是她的上帝，她的一切。他们在1968年或是1969年和我一起住过一段时间。他们母子形影不离，相互依恋，旁若无人，根本无视我的存在。这深深地刺痛了我。因为我和她原本很亲密。她是我的姑妈，我离开奥斯威辛时，是先去的她家。她烧饭我吃，供我洗澡，帮我穿衣，使我全身上下焕然一新，像模像样。"

埃尔德什的母亲总是为他的身体健康而担忧，也为他的

人身安全而烦恼。"他太好动了,"瓦兹索尼说,"他老是喜欢爬墙,像走平衡木一样顺着墙走动。他要是遇到一座小山,必定要爬上山顶,看看另一边有什么景色。当他做这一切时,你可以察觉到他母亲的心脏在砰砰地乱跳,她唯恐他从山顶上翻下去!"她总是替他担心。60年代后期,埃尔德什和他母亲跟瓦兹索尼夫妇一起住在加利福尼亚的曼哈顿比奇。"我们住的房子与海边大概有几百米远,其间是一片平坦的草地可以散步。埃尔德什说他想去岸边散散步,可他母亲就是不同意。她说绝对不能让他去冒险——万一海水涨上来怎么办?这太荒唐了——草地要比水面高出20英寸(约50厘米)。"埃尔德什还是不顾她的劝阻散步去了。"我们都在等他回来,"瓦兹索尼说。"她一直担心海水会涨上来。"可她本应为他辨别方向的能力担心才对,因为"他走后还没过10分钟电话就响了,电话是位女士打来的,她说她家门口有位先生迷路了,他说他是来拜访我们的,找不着回去的路了。我说,'告诉他站到草地上,面对北方,他就会看见我在向他挥手。'于是我走了出去,看到埃尔德什正在距我约四到五个街区那么远的地方站着呢。埃尔德什怎么会在毫无叉路可言的草地上迷路,这点我永远也搞不清楚。"

在埃尔德什的青少年和大学时期,他母亲防范他接触别的妇女。瓦兹索尼还记得1930年春,他们在布达佩斯的一件往事。当时瓦兹索尼和女友以及埃尔德什一起在埃尔德什家楼下的院子里闲谈。"当她正和埃尔德什开玩笑时,我们突然听到他母亲在楼上惊恐地喊道:'那个女人是谁?'当得知那是我的女友时,她明显地松了口气。"

埃尔德什从来没有交过女友,至于那种意义上的男友,当然也没有。"他70岁那年曾告诉过我他从未享受过性的乐趣,"瓦兹索尼说,"他说他这方面有问题。我还记得他当时是

这么说的:‘与异性交际的快乐我从来没有享受过。’”埃尔德什曾向一些朋友解释他因生理异常而无法享受性趣。“他告诉过我当他的生殖器开始充血膨胀时,他便觉得痛苦异常。”约翰·塞尔弗里奇说,“我认为,他没有找过专科医生去治这种病,想必若干年前他曾找过某个普通医生,医生也对他解释过他的症状,但并没有告诉他这是完全可以治愈的。确实,有许多现在医生能做到的事情,在二三十年前是做不到的,但对于埃尔德什来说,这并非问题的关键所在:数学是他的至爱,他从不向异性献殷勤——他从来也不想。”

有时候,埃尔德什会谈起他的性障碍,但从根本上讲,他对他的生理缺陷并不太在意,“情况很复杂,”埃尔德什 70 岁时对一位记者说,[7]“我的心理异常根深蒂固,我无法忍受性快感,这很奇怪。你知道,我有个特点,我一直想与众不同,这非常、非常地根深蒂固。从小时候起,我生性就不愿意和别人一样。”

正如他讨厌性一样,他也讨厌谈论性。“1940 年,”瓦兹索尼说,“格哈德·霍克希尔德(Gerhard Hochschild)和我花了好多时间去追女孩子,花了更多的时间谈论如何追女孩子。我们发现埃尔德什几乎无法忍受此类话题,于是我们就故意当着他的面大谈女人。这可把埃尔德什给激怒了。‘别那么无聊。’他抗议。”

其他一些朋友则故意用裸体女郎的图片折磨他,埃尔德什讨厌看到这个。“有一次,埃尔德什想打桥牌,”塞尔弗里奇回忆说,“我选了副特别的牌,牌的背面看起来一般,可正面是半裸女郎像。安德拉·哈纳尔(András Hajnal)认为保罗不会用这副牌。”于是我这样告诉保罗,说我知道他不喜欢裸女像,但我们只有这副牌,所以他只好对除了牌点以外的部分视而不见。“什么?”他审视了一下牌,然后说,“太可怕了!”但三四轮

打下来，他便自豪地宣布，“你们知道吗？只看牌点而忽略其余部分是可以做到的。”

“40年代后期，中国正处于战乱时期，”埃尔德什参加了为共产党中国人举行的食物募捐活动。“我记得当我走进加利福利亚大学洛杉矶分校的一间大教室，”瓦兹索尼说，“埃尔德什和其他人正忙着给食品打包。有些挑拨离间的家伙知道埃尔德什讨厌裸体女人，就提议如果他和他们一起去看脱衣表演，他们就捐献100美元。”出乎他们的意料，他立即接受了他们的提议，当他们如约支付了100美元时，他透露了获胜的秘密：“噢，我欺骗了你们，你们这些无聊的家伙！我取下了眼镜，便什么也看不到了！”

埃尔德什的种种古怪举动丝毫不能扼止女人们渴望和他同眠共枕的热情，不过她们只得满足于一种柏拉图式的关系。这些女性中最执著的要数同事约瑟芬·布鲁宁(Josephine Bruening)，可即便是她，在埃尔德什的生活中也不过是昙花一现罢了。“我叫她‘另一个女人’，”瓦兹索尼说，“他的最爱当然是他的母亲。”1962年，当时瓦兹索尼住在加利福尼亚，在有一段时间没接到埃尔德什的电话后的某一天晚上，突然接到了他的电话。“几个月听不到他的消息后接到一个电话不足为奇，”瓦兹索尼说，“但他常常是不事先打电话就作不速之客的，以前这是常有的事。”例如，“在这之前的某个周日的早晨，我听到我家楼下门口传来阵阵喧闹声。该死的，我想，一定又是那个送星期日报纸的报童在给我捣乱了。于是我从窗户探出身去想训斥他一番。天哪！是埃尔德什在敲门。‘为什么你不先打个电话来？’我问他。‘我为什么要先打电话？’[8]他说。”但这次他竟然提前打电话来了！“他告诉我他在加州大学洛杉矶分校，叫我马上去，我去了，两人开始交谈。他说，‘瓦兹索尼，以后不用你开车来回送我了。’然后他不停地摆

头，而我并不明白他这个动作的意思。我问他，'埃尔德什，你这是什么意思？'我模仿他扭头回身看的动作。他说，'我是说，她会开车来回送我的。'于是我朝他身后看去，有位女士正坐在那儿，她就是约瑟芬·布鲁宁。他就是用这种方式介绍我们认识的。

"那个周日，他们俩来到我们家，我不用再开车送他，这倒省了我不少事。他们俩总是形影不离。"和埃尔德什一样，她在政治方面可能比较固执，"有一天，我们开车前往拉古纳比奇，途中停下去看布道，"瓦兹索尼说，"约瑟芬坚决反对进入传教区，她讨厌天主教徒，而且进门要先交费，她说她可不想赞助天主教徒。但埃尔德什对此并不介意，于是我们便进去了，他和我女儿一起喂鸽子。之后我们便前往拉古纳比奇，正在这个时候难题来了，因为旅馆里所剩房间不多了，只有一间房间租给埃尔德什用。他和约瑟芬两人不能一人一间，经理建议他俩睡在一个房间里，埃尔德什急了，'这不可能！'"

还有一次，一对夫妇安排埃尔德什与布鲁宁同他们一起去海西拉斯露营。当埃尔德什发现他得和布鲁宁合住一个帐篷时，他跳了起来，"那可不行！"他咆哮着，"她感冒了！"当朋友们发现她看上去很好时，他脱口而出："我可不能那样做，因为她是个女人。"在陪伴他左右数月之后，布鲁宁告诉瓦兹索尼的妻子劳拉，说她已经做够了埃尔德什的司机，准备甩了他。不久她便走了，从此杳无音信，埃尔德什也不再提起她。

但埃尔德什对与他母亲共居一室却没有任何顾虑。"我还记得那是在60年代，"瓦兹索尼说，"韦斯特伍德的一家旅馆给他们准备了一套两居室的套间，很干净，也很漂亮。但他母亲并不满意，'太脏了，'她说，可事实并非如此。我们都不明白到底什么地方令她不满。埃尔德什便打电话给前台要求

在卧室里放张帆布床，当服务员拎着帆布床进来后，她的异议立即消逝得无影无踪。他显然知道他母亲抱怨房间不清洁只是个借口，她不过是想和他共居一室罢了，可我们真不知道这一点。”

1971年，埃尔德什的母亲在加拿大卡尔加里死于出血性溃疡，当时埃尔德什正在当地作一个学术报告。显然是属于误诊，否则她很有可能得救。不久以后，埃尔德什开始大量服药，刚开始是一些抗抑郁药，后来是安非他明片。作为匈牙利科学界的领袖之一，他要那些富于同情心的匈牙利医生开药是不用多费口舌的。“我当时情绪非常压抑，”埃尔德什说，“一个老朋友保罗·图兰提醒我，数学是座坚固的堡垒(需要我们去攻克)。”埃尔德什将这忠告牢记在心，开始天天大干19个小时，殚精竭虑地写出了足以改变数学历史进程的大量论文。但是数学依然被证明是一张筛子，而不是一座堡垒。埃尔德什再也不忍心睡在布达佩斯和他母亲一起住的公寓里，他只把它用来安排来访的朋友，他自己则搬到匈牙利科学院的客房去住。

在他的余生中，埃尔德什会不时地想起他母亲来。“在参加一次会议期间，有一天我正穿过院子准备去吃早饭，”宾夕法尼亚大学的组合数学家赫布·威尔弗(Herb Wilf)回忆道，“埃尔德什刚好吃完早饭从我对面走来，当我们相遇时，我习惯性地问候道：‘早上好，保罗，今天好吗？’他一下子止住了脚步，出于尊敬和关心，我也停了下来。我们默默地站在那里，他认真地思考着我的问话，好像那是个渐近线理论方面的划分理论中的渐近问题，需要好好想想才能回答似的。他的一生都在冥思苦想重要的数学问题，但对待这样的日常问候语也很认真。他沉思了好一会儿，终于回答道：‘赫布，今天我很难过。’我说：‘听到这个我很抱歉，你为什么难过，保罗？’他

说：‘是因为我想念我母亲。你是知道的，她死了。’我说：‘是的，我知道这事，对于她的去世，你和我们大家都感到很难过。但这不是5年前的事吗？’他答道：‘是的，5年了。但我很想念她。’我们相对无言，尴尬地站了会儿，然后各奔东西。”

原书空白页

第 π 章

最坏情况博士

亲爱的罗恩：

当保罗·埃尔德什的母亲去世的时候，有人告诉我她是他的最后一位至亲。现在我敢肯定你是与他留下的这个亲密家庭关系最为亲近的人。

你听说过两个哲学家讨论存在地外生命之可能性的典故吗？其中一人说，如果外星人存在，那么他们的智力水平就有可能超过我们人类，因此我们可以预期他们已经访问过地球了。但他又说："但他们有没有留下什么痕迹呢？"另外一位哲学家俯身过来对他耳语道："嘘！这里我们自称匈牙利人。"正是有了像埃尔德什这样杰出的人才成就了这样的典故。

在此，我哀悼这位伟人的逝世——这样一位自我牺牲的学者，年迈的神童，同时也向你表示慰问和感谢，感谢你所做的一切。在这个坎坷的社会，是你给他铺平了道路。为此，你付出了比其他任何人都要多的努力。

谨致

最诚挚的祝愿。

戈登·雷思贝克(Gordon Raisbeck)

那是 1997 年 5 月 12 日黄昏时候的新泽西州沃冲。罗纳德·格雷厄姆正在他后院的蹦床上从一天的数学思考中解脱

出来。“有一次我试图让保罗的母亲到蹦床上来。”格雷厄姆说，“但是她拒绝了，而保罗却爬了上来，又扑通一声摔了下去。”格雷厄姆腰间紧箍着金属环，环上拴着的 20 根蹦极绳把他悬在离蹦床几英尺的空中。在他右边是 10 根蹦极绳，与拴在一根树上端的登山绳相连。在他左边的另外 10 根蹦极绳与拴在他的屋顶的绳子相连。“我的目标是两圈转体两圈空翻。”格雷厄姆说，“以前我从未在蹦床上实现过这一目标。蹦极绳可以防止我摔下，因而给了我勇气，年纪大了，也就不那么强壮了；身体一不强壮，就容易摔跤；一摔跤，就可能受伤；上了年纪，伤愈的时间也要长了。”

格雷厄姆蹦上蹦下，蹦极绳就像弹弓一样将他射向空中。但整个结构并不是那么安全。起支撑作用的树干部分被蛀空了，将蹦极绳与腰环相连的固定器也有金属疲劳的迹象。格雷厄姆不得不说服他的曾当过高中数学老师的零工伙计整一整他的蹦极绳装置。他答应了，但前提是格雷厄姆签一份声明，万一蹦极绳出问题他不负责。那个傍晚蹦极绳挺住了，但还未经过两圈转体两圈空翻动作的检验。(直到几个星期之后，一队“靠教一年级学生前滚翻度日”的俄罗斯马戏演员上了格雷厄姆的蹦床作了三圈转体两圈空翻动作，格雷厄姆受到启发，才完成了他的两圈转体两圈空翻动作。)那天晚上他还心满意足地一边蹦上蹦下，一边讲述着他的故事。

格雷厄姆于 1935 年万圣节前夕生于加利福尼亚的塔夫脱，父母分别是焊工和气割工。“我记得我母亲这样解释两者的差别，”格雷厄姆说，“‘焊工把东西连接在一起，而气割工把它们分开。’”为寻找焊接和气割的工作，格雷厄姆全家一两年就要搬一次家，以便能在从加利福尼亚到佐治亚到佛罗里达的油田和造船厂工作。“我们搬了那么多次家，以致我都不记得我都住过哪些地方了。我的童年生活整年整年都是空白。

那时候，"他淡淡地说，"日子并不都是那么快活的。"

确实如此。他6岁的时候父亲悄悄地离开了他们的小镇，一隔6年杳无音信。后来在加州伯克利的一个早上，当格雷厄姆正在送报纸的时候(他每天送两次报纸，以帮助母亲维持生计)，猛一抬头看见一个面熟的人正盯着他。"请问，"格雷厄姆说道，"你是我的父亲吗?"那个人给了他一块漂亮的怀表，并请他不要把他在镇上的消息告诉母亲。他不想她讨自己欠她的钱。

在父母间周旋并不轻松，况且他又没有多少朋友可以帮忙。格雷厄姆说道："一个老搬家的人是很难交朋友的。上高中的时候我只有过一次约会。那一次我把她送到三个月前死去的男朋友的墓地。她哭了起来。不用说，那次约会不会很成功。"

格雷厄姆一直是一位优秀的运动员，尽管上小学的时候他个头小得跟年龄不相称。"我个子太小了，"格雷厄姆说，"无法参加像橄榄球之类的大众运动，于是我就学翻筋斗和耍球这类不受个头影响的运动。"[由于上大学时个头猛长，现在格雷厄姆的身高已达6英尺2英寸(约1.88米)，对体操运动员来说简直就是巨人。]当格雷厄姆走遍全国的时候，他的体操和耍球技巧使得他很快能跟同道们交上朋友。"当你看见有人能耍5个球的时候，你就知道他一定也跟你一样，走过同样一段漫长曲折的学艺之路。这种纽带很快就变成了同道之谊。"

与埃尔德什相比，格雷厄姆只是一个数学晚辈。就算他最后被数学迷住了，数学成为他的职业也走过了一段曲折的道路。当他还是小孩的时候就擅长记住报纸客户的门牌号，并在脑子里玩味着这些数字而乐此不疲。他的一位五年级老师史密斯(Smith)小姐教他怎样计算平方根，他发现那太容易

了，于是决心将这个方法发展到计算立方根。然而，在那个年龄，他对星星和星系的兴趣有过于数字，后来他甚至考虑过成为一位天文学家，只是当他发现天文学家花在盯着数据记录上的时间比用望远镜观测的时间更多时才断了这个念头。

格雷厄姆对数学的兴趣源自他上七年级的时候。“那时候我们住在加利福尼亚里奇蒙的一个建筑区，那一片是造船的地方。我们的墙壁是木板做的——你都可以用手捅过去。可是我很幸运。我有一位好数学老师理查德·施瓦布(Richard Schwab)，他同时也是我的国际象棋教练。至今我还留有他的一幅照片。”格雷厄姆说着，从一个童年纪念品的箱子里抽出一张1947年的剪报来。“这就是施瓦布。”他指着一位精干的先生，不无依恋地说。那时年轻的罗纳德正执黑在首场比赛中代表哈里·埃尔斯初中队迎战加利福尼亚盲人中学，施瓦布躬着腰全神贯注地站在他的旁边。(“我那时还想，嘿！对手是盲人，那还不容易。结果我错了！”)施瓦布确实在下棋上帮助了格雷厄姆——照片上的情况表明格雷厄姆已经在那场慢速英式开局中控制了前三步——但更多的帮助还是在数学方面。

“那时候我已经懂得代数和三角。”格雷厄姆说，“我自信能解决所碰到的任何问题。这时，施瓦布故意出了这样一道题来难我——50年过去了，今天我还记得很清楚——如果你知道老鼠的死亡率与它的数量成正比，你怎样确定老鼠的数量(你也许想知道在未来某个时候老鼠的数量)。施瓦布说，为解答这个问题需要用到微积分，需要有积分和微分方程等方面的知识。我从没有听说过微积分，于是弄来了一本微积分的教科书从头到尾读了下来，到期末我就能解答那个老鼠问题了。数学世界令我神往。我擅长于数学，虽然它不能给我提供一个完美的避风港，但却是一个属于我自己的世界，一

个思维清晰、逻辑严密、自成一体的世界，一个给人以‘确定性’的世界。”(数学家们在描述他们所从事的工作的魅力时，经常喜欢用确定性这个词。埃尔德什曾经说过：“如果有什么东西是确定的，那就是数学。数学具有绝对的确定性。”)

格雷厄姆喜欢自学，结果他跳了好几级，并在母亲的鼓励下于1951年年仅15岁时就赢得了福特奖学金而进入芝加哥大学。芝加哥大学可非同一般：他的所有同学都是高中时期的佼佼者，其中就有卡尔·萨根。“那时候芝加哥大学正在进行一项名为‘名著计划’的教育试验。”格雷厄姆回忆说，“大学几年学生主要阅读牛顿、达尔文的原著，读柏拉图，读乔叟(Chaucer)。由于入学考试后我未被安排到数学班，因此他们不让我攻读数学。”结果他被编到一个从事舞蹈、体操、要球和其他马戏运动的名为“杂技剧团”的俱乐部。“那倒是投我所好。我们到芝加哥各中学巡回演出，表演了精彩的杂技节目。”

大学上了三年后，格雷厄姆的奖学金到期了。“由于我的成绩不突出，”格雷厄姆说，“因而不能继续享受奖学金。我对‘名著’的兴趣还不如对要球和蹦床的深。这时我父亲介入进来，提出如果我从‘危险的、左倾的’芝加哥大学转到他知道的像加利福尼亚大学伯克利分校这样一所‘全美的学校’的话，他将帮我支付学费。”格雷厄姆同意了父亲的要求进入伯克利。然而，他的数学雄心仍无用武之地：他不能攻读数学专业，原因是他从没正规学过一门微积分课。于是他上了电气工程专业，在补修数学的同时还兼做杂技演员挣些外快。

在伯克利，格雷厄姆有幸师从德里克·H·莱默(Derrick H. Lehmer)学习数论。这位数学家和他的传奇式的父亲德里克·N·莱默(Derrick N. Lehmer)一起以猎取巨大的素数而载入数学史册。“在第二学期，”格雷厄姆说，“他教给我们才出现不

久的素数定理的证明。那也是我第一次听说埃尔德什。"然而,在伯克利学了一年以后,格雷厄姆开始担心起征兵的事来。"我不符合学生缓征的条件,因为我上了四年大学却没得到一个学位。在没有人可咨询的情况下,我看到了这本空军征兵的小册子,于是便决定报名。那时候我们没什么仗可打,我想与其等着被征,还不如自己报名更能掌握主动权。我希望学几年俄语或中文,成为一名翻译。据说如果你考试得第一名——我确实得了个第一名——你就可以挑选你的岗位,也可以挑选去世界上任何一个地方。但事实证明不是这样:你得认识相关部门内适当的人。我谁也不认识,于是就被派往阿拉斯加费尔班克斯以南约26英里(约42千米)的艾尔森空军基地。那是1956年的事。我想,去那个地方还是比去格陵兰的图勒要好。"

"我被指派为一名'通信专家',实际上也就是一名接线员而已。我在士兵俱乐部工作。到了晚上,一般是在发薪日之后,士兵们会来那儿喝喝酒,给在美国本土的家里或女朋友挂个电话。那时候阿拉斯加还不是一个州,给本土挂个电话有时要花上2个小时的时间,而且1分钟要花费7个美元。别人都不想晚上上班,而我却乐得干,因为那样白天就是我自己的了。"他白天所干的事情之一就是上阿拉斯加大学,但他接受正规数学教育的计划又一次受阻了:因为阿拉斯加大学没有数学专业,他只得学些物理课程。

"在阿拉斯加我有些孤独,况且我也不喜欢兵营的生活。要想不住在基地,一个办法就是结婚。我在芝加哥时就认识一位叫利厄(Leah)的女人,她是一位杂技演员。我们相处得不错,虽然没有发生性关系,但相处很密切。于是有一天我就给她挂了个电话说:'嘿,我们结婚吧!'她回答说:'你在开玩笑!'我说:'不,为什么我们不结婚呢?'结果证明她已经订婚

了,况且我也太天真了,不知道结婚还有那么多麻烦——结婚证、结婚仪式、亲朋好友等等。但我们还是结婚了,那是在1957年。她来到阿拉斯加,我们搬进了费尔班克斯的一个舞厅的地下室里,离阿拉斯加大学只有6英里(约9.6千米)。"但到1958年,他们就分手了。最后,格雷厄姆终于拿到了阿拉斯加大学的物理学学位。据此,他说服军方让他到萨克拉门托的一个基地去服了他四年兵役的最后几个月。1959年1月,他从那儿回到了伯克利。

"那时我还缺少很多基本的数学知识。"格雷厄姆说道,"但我差一点就要写出论文了。过了一段时间我才赶上那儿的节奏。"他选了陈省身(S.S.Chern)的微分流形课,结果"第一天课就上得够快的,可第二天前几排的学生就嚷道:'嘿,动点真格的吧!'陈省身认为是他讲得太慢了,于是开始全速前进。原来,那些研究生一般是先旁听一门课一两次,然后才选它拿学分。"[1] 怪不得连课程的资料都是第一次见到的格雷厄姆不得不格外努力。在伯克利,格雷厄姆结识了南希·扬(Nancy Young)这位后来成为他第二位妻子的数学同学。"就像南希爱说的那样,我们仅仅在一起学了一门数学课,她得了个'A',我得了个'B'。"为了挣钱,他组建了一个蹦床杂技团"蹦跳的贝尔"和一个滑稽耍球小组"失手的富兰克林",从小商品店的入口到马戏团四处表演("我们只得表演滑稽耍球。我的耍球搭档功夫不佳,不得不转而求之于幽默。")。1960年他在加利福尼亚大学生蹦床比赛中和另外一位选手荣获并列冠军。"我喜欢蹦床运动,"格雷厄姆说道,"这是一种自我松弛的好办法。但我对自己松弛的程度还是有限制的。在1960年的比赛中跟我并列冠军的那个人不带降落伞从飞机上跳了下来,经过一阵自由下落后抓住了先前跳下来的人的降落伞。因为这件事,加利福尼亚州依据反自杀条例起诉了他。"

■

格雷厄姆的博士论文研究的是单分数。单分数就是正整数的倒数,如1/5,1/8,1/127等,也就是分子为1的分数。古埃及人特别珍视单分数,除此以外,他们对别的分数不予考虑(只有2/3这个分数例外,因为它有自己特别的象形意义)。我们对于古埃及数学的知识主要来源于经过3 500多年后仍然留存下来的草纸书卷,其中最著名的就是公元前1650年的长18英尺(约5.5米)、宽1英尺(约0.3米)的兰德草纸或称阿米斯草纸[阿米斯(Ahmes)将它从更为古老的资料中抄了下来并"表现出对所存资料及其所有晦涩玄秘之处的真知灼见"。而亨利·兰德(Hanry Rhind)则是那个于1858年在尼罗河旅游胜地鲁克塞将它买了下来的苏格兰古董商。]该草纸的开头是将$2/n$(n的取值是从5到101的所有奇数)表示为不同的单分数之和的一张表。例如:

$$2/5 = 1/3 + 1/15$$
$$2/7 = 1/4 + 1/28$$
$$2/13 = 1/8 + 1/52 + 1/104$$
$$2/15 = 1/10 + 1/30$$

至于古埃及人为什么要这样来表示分数,目前还不清楚。也许他们发现这样表示分数简单些。有时候将分数这样分解后更容易比较它们之间的相对大小。55/84是否大于7/11?分解成单分数后就很容易看出答案是肯定的:

$$55/84 = 1/2 + 1/7 + 1/84$$
$$7/11 = 1/2 + 1/8 + 1/88$$

"有一次我问安德·韦尔(他既是一位著名的数学家,同时又是一位历史学家),古埃及人为什么要这样做。"格雷厄姆说

道，“结果他说：‘他们准是误入歧途了。’幸亏我没有在作论文期间问他这个问题，否则将挫伤我的信心。”希腊人同样也误入歧途（他们对待罗马数字也是这样），以至到17世纪欧洲还一直偏爱将分数分解成为单分数。老普林尼（Pliny the Elder）在他的《自然历史》中将欧洲的面积估计为“稍大于整个地球面积的1/3加1/8”——也就是1/3+1/8强，即比11/24多些。

如果允许重复使用单分数，那么这种分解就是小事一桩了。例如，4/5就可以表示为1/5+1/5+1/5+1/5。但如果像古埃及人那样规定各个分母都不相同的话，将分数分解为单分数的这种表示法是否始终可能的呢？直到1202年，中世纪欧洲最伟大的数学家莱昂那多·斐波那契（Leonardo Fibonacci）才证明了答案是肯定的。

事实是任何非单分数分解为单分数之和都有无限多的表示法。利用斐波那契所知道的恒等式 $1/a=1/(a+1)+1/a(a+1)$，可以将单分数之和不断地展开。例如，$1/2=1/(2+1)+1/2(2+1)=1/3+1/6$；对1/3再使用该恒等式，可将上式展开为：$1/2=1/4+1/12+1/6$；对1/4再展开，结果变为：$1/2=1/5+1/20+1/12+1/6$。你可以随心所欲地将它继续展开下去。

斐波那契喜欢使用所谓的“贪心算法”构造单分数，即每次展开都选择尽可能大的单分数。例如，使用“贪心算法”分解3/7的结果为：

$$3/7=1/3+1/11+1/231$$

（具体做法如下：先选取小于3/7的最大单分数——即1/3，因为1/2比3/7稍大——然后将3/7减去1/3得到2/21。再取小于2/21的最大单分数1/11，将2/21减去1/11，结果就得到了我们所需要的单分数1/231。斐波那契表明使用“贪

心算法"总能将一个分数分解为有限个单分数之和。)

然而,无论是"贪心算法"还是其他什么方法,我们还不知道用什么方法可以将分数作最佳展开。这里,所谓"最佳"是指要么各展开项的分母尽可能地小,要么展开项的个数尽可能地少。在 3/7 的展开式中,最大的分母可以控制为 21:

$$3/7 = 1/6 + 1/7 + 1/14 + 1/21$$

展开项的个数也可以控制为 3:对于 3/7,"贪心算法"的分解结果碰巧有 3 个展开项(即 1/3 + 1/11 + 1/231)。但还有一个"更好"的 3 项展开式使得最大的分母不是这样大的 231,而是一个小得多的数 28:

$$3/7 = 1/4 + 1/7 + 1/28$$

对于其他的分数,"贪心算法"有时得出的展开式既没有最少的展开项,也不是最小的分母。虽然 5/121 可以"经济"地表示为一个 3 项的展开式:

$$5/121 = 1/25 + 1/759 + 1/208\,725$$

但"贪心算法"的展开结果却是如此烦琐:[2]

$$5/121 = 1/25 + 1/757 + 1/763\,308 + 1/873\,960\,180\,913 + 1/7\,638\,092\,437\,828\,241\,151\,744$$

1955 年,格雷厄姆的导师莱默因担心他的兴趣局限于课堂而向他提出了赫布·威尔弗登在《美国数学月刊》上的这样一个问题:证明任意一个分母为奇数的非单分数都可以表示为分母为奇数的若干个单分数之和。例如,2/7 可以表示为:

$$2/7 = 1/5 + 1/13 + 1/115 + 1/10\,465$$

格雷厄姆对问题的研究更上一层楼。他考虑的是什么样的分数可以表示为分母为整数的平方的单分数之和,例如1/3的下述表示法:

$$1/3 = 1/2^2 + 1/4^2 + 1/7^2 + 1/54^2 + 1/112^2 + 1/640^2 + 1/4\,302^2 + 1/10\,080^2 +$$

$$1/24\ 192^2 + 1/40\ 320^2 + 1/120\ 960^2$$

格雷厄姆证明在某一范围内有无限多的分数可以这样表示。“莱默把我的证明寄给了一位叫舍曼·斯坦(Sherman Stein)的单分数方面的专家。”格雷厄姆说道，“斯坦在给他的回信中说证明者‘不是一位聪明的研究生就是一位杰出的大学生’。这样的称赞是令人高兴的，但我却入伍当空军去了。”

1959年格雷厄姆从空军退役后希望证实他的“整数平方”的假设是否是独创性的，于是把他的证明寄给了保罗·埃尔德什。格雷厄姆听说过埃尔德什把跟踪数学文献的结果都记录在脑子里，而且埃尔德什本人也在1932年写过有关单分数的论文。“埃尔德什回了信。”格雷厄姆说道，“他说他没有听说过这一结果。虽然具体回信内容我记不清了，但我可以想象他鼓励我作进一步探索。这是他的一贯做法。‘除整数的平方以外，你有没有想过更高次的指数？’他可能这样问：‘什么样的分数可以表示为立方的倒数之和？’”

对于说明数论领域的进展以及特殊的结果怎样被逐步推广，埃尔德什在1932年所写的论文具有代表性。1915年，一位名叫泰辛格(Taeisinger)的人证明前 n 个数的倒数之和不可能是一个整数，即 $1/1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \cdots + 1/n$ 不可能是整数。1918年，一位名叫科西查克(Kurshchak)的人去掉了其中 n 个数从1起始的条件，即任意连续 n 个数的倒数之和不可能是整数。1932年，埃尔德什又去掉了其中 n 个数连续的条件，即只要这些数的间隔相等，它们的和就不可能是整数。例如1,4,7,10,13这些数之间有公差3，根据埃尔德什的证明，$1/1 + 1/4 + 1/7 + 1/10 + 1/13$ 不可能是整数，而且无论这个数列有多少项，它们相加的结果都不可能是整数。

■

在数学史上,单分数的专家斐波那契不是与"贪心算法"齐名,而是与他提出的有关兔子的一个"傻"问题齐名:"某人把一对兔子关在屋子里。假设每对兔子每月生下一对兔子且新生的兔子从第二个月即开始繁殖,那么一年以后屋子里有多少对兔子?"开始时,屋子里有一对兔子。到第一个月末,由于第一对兔子生下一对兔子,因而总共有了2对兔子。到第二个月末,第一对兔子又生下一对兔子,所以总共有3对兔子。到第三个月末,第一个月的那2对兔子又生下了2对兔子,因而总共有了5对兔子。各个月兔子对的数目形成了一个数列:1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,377…,其中每个数都是它前面的两个数之和。斐波那契仅仅提出了这个"兔子问题"并给出了答案377,他并没有对得出答案377的这个数列作进一步研究。直到6个世纪后,法国数论学家卢卡斯(François Édouard Anatole Lucas)才研究了以任意两个正整数开头且后面的每个数都是前面两个数之和的这样一个数列。斐波那契数列只是此类数列中最简单的一个,其中的数字后来逐渐被称作斐波那契数。

在斐波那契数列中有素数,如2,3,5,13,但迄今为止还没有人知道这些素数的个数是有限的还是无限的。很容易选取其他两个起始数使得这个类斐波那契数列中一个素数也没有。比如,可选取起始数4和6,这样得到的类斐波那契数列4,6,10,16,26,42,68,…中的每一项都可以被2整除,很显然其中就没有素数。如果选取存在公因数的两个数,比如有公因数5的两个数10和15,作为起始数,那么所得的数列10,15,25,40,65,105,…中也没有素数,因为其中的每一项都是5

的倍数。当然这些例子都微不足道。埃尔德什想知道的是，能否找到互素的两个数(即两者之间没有大于1的公因数)作为起始数使得所形成的类斐波那契数列中没有素数？他证明了这种数列是存在的，其中已知的两个最小起始数分别有16位和17位数字：

3 794 765 361 567 513 和 20 615 674 205 555 510。

■

1962年，上了7年大学的格雷厄姆终于拿到一个数学学位。"我从来没有想过拿到学位以后还必须参加工作。我一直就在学校，从未想过毕业后干什么。"直到现在，格雷厄姆也用不着多想这个问题，因为后来不久他就遇到了美国电话电报公司贝尔实验室负责招聘的数学家戴维·斯莱皮恩(David Slepian)，得到了在新泽西州默里山的一份工作。斯莱皮恩之所以认为格雷厄姆适合于美国电话电报公司的工作，原因既不在于格雷厄姆值夜班当接线员的经历，也不在于他天真地写在简历上的推荐人——他的体操教练，而是格雷厄姆有关古埃及人的分数的论文给了他深刻的印象，显示出格雷厄姆在这个电话公司所依赖的数学领域(组合数学)中的杰出才能。"我在伯克利的朋友说，如果我不到大学任职而跑到公司去工作的话，我会想死数学的。"格雷厄姆说道，"但我想先尝试几年，积攒点钱，然后再考虑我真正想做的事。"

36年过去了，格雷厄姆依然在新泽西州的AT&T。南希也一直效力于美国电话电报公司的麾下，在它的一个下属单位朗讯科技公司任高级系统编程员。但他们两人在婚后第19年，即1978年分手了。他们有两个已长大成人的孩子，马克(Marc)和彻(Ché)，他们都不从事数学了，而是分别在软件

测试和数字图象行业工作。但他们对耍球却都有些涉足，显然是受父亲金钱悬赏所驱使。“我告诉他们如果他们能耍3个球25次，我将奖给他们25美元，4个球的奖金为100美元，5个球的奖金为1000美元，他们问我‘那6个球呢？’我说‘没门！如果你们果然热衷此道，能耍到5个球的话，那就很有可能学会耍6个球了。’”他们各得了100美元的奖金。格雷厄姆和芳蓉是在1983年结婚的，后来他们的两个孩子也各得了100美元的奖金。

跟格雷厄姆一样，芳蓉也是世界上组合数学领域的主要开创者之一。在国立台湾大学毕业时她就是班上的尖子生，1970年移居美国。据后来担任她导师的赫布·威尔弗说：“她来到宾夕法尼亚大学读研究生。在这些研究生通过资格考试之前，我是不会注意他们的。我的一贯作法是等他们通过资格考试后再设法使其中最优秀的学生学组合数学。在她参加考试的那一年，即1971年，她的成绩遥遥领先——第二名的成绩和她相差悬殊。于是我立即找到了她（在那以前我跟她一句话也没有说过），问她是否知道组合数学。她说她在国立台湾大学时就知道些，但知之不多。我搬出拉姆齐理论来——那准是好东西，就像磁石一样准能将研究生引到组合数学中来。我拿出一本书，让她读其中讲拉姆齐理论的那一章，并约定过一周后再一起讨论。在再次见面时，我问她是否喜欢这一章的内容。她笑了笑，说：‘挺好的。’然后，她把书翻到一个重要的定理处，轻声说道：‘我想，这个定理还可以证明得好一点。’我兴奋得眼珠子都要蹦出来了，请她到黑板前讲给我听。结果真是不可思议：她几乎从零起步，仅仅用了一周的时间就在拉姆齐理论上取得了一个重要的成果！我告诉她，仅此她就完成了一个博士论文的三分之二。‘真的吗？’她柔和地回答说。后来，这个成果果然成了她博士论文的一个

重要部分。

■

当我第一次见到芳蓉时，她在贝尔考公司担任数学研究的负责人。贝尔考公司是贝尔实验室的一个分支机构，在AT&T解体后，负责该地区电话公司的技术支持。我的一位像格雷厄姆一样既是数学家又是耍球能手的大学朋友恰巧在芳蓉手下工作。我有一阵没见过他了，于是向芳蓉打听他干得怎么样。“斯图亚特(Stuard)真棒！”芳蓉笑容可掬，“今天他不知不觉地给电话公司节省了几百万美元！”不知不觉？怎么会呢？斯图亚特这位哈佛的学士、斯坦福的硕士、哥伦比亚的博士可不是傻瓜！

纯数学的发现，虽然看起来可能与现实世界毫不相干，但有时其实际应用价值却远远超出发现者本人的想象。斯图亚特的工作就是这样。历史上许多最优秀的数学家经常以自己的数学研究与实际应用不沾边而自豪。他们的战斗口号就是“为数学而数学”。他们担心现实世界的干扰会影响数学所揭示的纯真的秩序和美感。当欧几里得研究素数时，他引以自豪的是素数对希腊生活毫无应用价值。哈代也以自己的“无用”而高兴。“我从未做过什么‘有用’的事情。”[3] 有一次他这么说道——不是理屈辞穷，而是理直气壮地——“我的任何发现都没有，也不可能对平静的现实世界产生什么影响，不管是直接的还是间接的，也不管是正面的还是负面的。”哈代是一个虔诚的和平主义者，他自豪地宣称他擅长的领域，即数论，将永远不会用于军事目的。但是他错了。在过去的20年中，完全弃置不用达2300年之久的素数作为最安全的军事密码在五角大楼找到了用武之地。

"这就是数学难以自圆其说的地方。"评论家约翰·蒂尔尼(John Tierney)说道,"不管数学家们下多大的决心撇开现实世界,但他们都一无例外地为了解世界提供了最好的工具。古希腊人决心去研究一种称为椭圆的曲线时并没有什么目的,2000年后天文学家们发现这种曲线恰好描述了行星绕太阳的运行轨道。1854年,德国数学家黎曼不知为什么提出这样一个问题:如果舍弃欧几里得平面几何的一条重要公理,那会出现什么情况?他构造了一个貌似荒唐的假设,即不可能画出两条平行线。他以一种称为弯曲空间的奇异抽象,用自己的非欧几里得几何取代了欧几里得平面。又过了60年,爱因斯坦宣称这正是宇宙的形状。"[4]

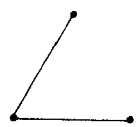
跟哈代不同的是,埃尔德什更能容忍数学的应用,尽管他工作的驱动力并不是这些应用。而且他很现实地意识到,数学也和其他科学一样,"每一样能够用于善举的东西同样也能用于恶行。归根到底,确定毒气传播的微分方程同样也能描述污染物的扩散。因此,人们既能有意散播毒气,又能防止污染的扩散。"[5]

但当同事的兴趣脱离纯数学时,埃尔德什反对的态度却十分明朗。"当我为继续当一位数学家还是去工学院当一名工程师的问题犹豫不决时,"瓦兹索尼回忆说,"埃尔德什警告我:'我会藏起来,等你一去工学院,我就毙了你。'一句话就把我搞定了。"[6] 当概率论专家马克·卡克基于第二次世界大战期间自己在麻省理工学院辐射实验室的工作在《应用物理杂志》上发表了一篇论文时,埃尔德什寄给他一张一句话的明信片:"我为你的灵魂祈祷。"[7] 埃尔德什在"提醒我",卡克说道,"我可能正在偏离正轨。而事实也确是如此。"

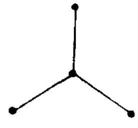
今天,纯数学和应用数学之间的界限已变得比以往任何时候都要模糊。计算机的发明推动了许多数学领域的发展,

原因倒不是因为用计算机从事数学研究更为容易(尽管有时候确实如此),而是因为计算机的工作本质上是属于数学领域的。而一向借用数学语言去描述自然法则的物理学现在也投桃报李,提出了需要全新数学知识的新奇物理概念,现代宇宙学中的"超弦"就是其中之一。

在企业的研究室里,比如贝尔考和 AT&T,要解决很现实的问题,有时候需要发展新的数学观念。格雷厄姆喜爱引用的一个例子,就出现在 AT&T 为有多个地址的公司顾客建立私人电话网络的时候。AT&T 的收费规定很严格,而且政府也规定私人话网的收费不应以所占用公司的实际网线为依据,而应取决于连通不同地址所需线路的最小(理论)长度。有一家顾客——格雷厄姆记得好像是德尔塔航空公司——有三个等间距主要地址,假设他们之间都相距 1 000 英里(约 1 600千米)。也就是说,这三个地址构成一个等边三角形的三个顶点。AT&T 收了德尔塔公司 2 000 英里(约 3 200 千米)的线路费,因为连通这三个地址的最短线路似乎很明显:



但德尔塔公司对这项收费提出了质疑,并指出如果他们在由这三个地址构成的等边三角形的正中心处设立第四个办公室的话,那么连线的总长度将降至 1 730 英里(约 2 780 千米),也就是说降低了 13.4%。德尔塔利用了这个于 1640 年提出、后来又于 19 世纪被瑞士数学家雅各布·斯坦纳(Jacob



Steiner)发展了的数学发现。

AT&T 的管理层慌了神:如果德尔塔声称建立第五个办公室的话情况又怎么样? 所需的连线还会进一步缩短吗? 要是所有的私人网络用户开始虚设办公室以缩短连线又怎么办? 如果这样的话,AT&T 又得为此付出多少钱呢? 格雷厄姆被委托处理此事。1968 年,他在贝尔实验室的两位同事提出了这样的猜想:不管网络有多大,添加站点节省的连线长度都不会大于 13.4%,但他们未能证明自己的猜想。格雷厄姆为这个问题断断续续想了些年头。他还效法埃尔德什的做法为问题的证明悬赏 500 美元的奖金。直到 1990 年这笔奖金才有了得主:找到证明的是他在贝尔实验室的同事黄光明和普林斯顿大学的博士后堵丁柱。

■

在美国电话电报公司格雷厄姆办公室的墙上挂有他的女儿彻拍摄的一张照片,照片上格雷厄姆正要着 12 个球。事实上,世界纪录也只有 9 个球。格雷厄姆说:"那项纪录是一位放弃要球后去经营草地业务的人创下的。"格雷厄姆有把握的是要 6 个球,但偶尔也能要到 7 个球。彻对照片进行了数字处理,使得在她父亲要球时有 12 个球同时在空中。处理后的照片似乎天衣无缝:球在格雷厄姆身后的墙上投下淡淡的影子,而位于圆弧底部的那些即将被格雷厄姆抓住因而也是速度最高的球,其相应的影子也最模糊。"生活中的许多事情都可以比作要球。"格雷厄姆说,"无论你掌握了什么技巧,你都可以再加一个球。在数学中当你证明了一个定理时,总有另一个猜想仍等着你去证明。埃尔德什从不让你在一项证明的欢呼声中打瞌睡,而是将你推向下一个猜想的证明。"

造物主真是毫厘不爽：长期时间安排过紧的格雷厄姆在AT&T的数学业绩就牵涉到计划和效率的问题。20世纪60年代中期，贝尔实验室受政府委托评估奈克(Nike)导弹防御系统。"其基本思路就是——我好像刚弄清头绪——我们的防御对象是从各个方向飞来的大量导弹。你必须查清这些导弹来自哪里，是什么样的导弹，谁发射的这些导弹，而且信息的处理要相当快，否则就没有机会了。你有一堆机器、一堆计算机帮你进行分析。这些机器是很笨的，它们的运行遵循简单的规则：一旦某台机器开始执行一件任务，它就必须完成这项任务；即使出现更急的事情，你也不能使一台正在执行任务的机器中途停下。如果一台机器闲着有可能去执行任务，那么它就必须去执行某项任务。你也许认为如果你增加机器，你就肯定能够提高分析速度，从而更快地完成任务，但情况不是这样。在有的情况下如果你增加机器的台数，完成任务所需的时间反而更长。那可不是好事！国防部要求确保不论发生什么情况，机器不会花更多的时间。"确定最坏情况的任务落在格雷厄姆的头上。在他的所有证明当中，有一条就是如果增加机器，最糟糕的情况下所花的时间也不会超出原来的2倍。

格雷厄姆还为美国国家航天局(NASA)进行过类似的最坏情况分析。格雷厄姆说，在阿波罗登月计划中，"他们的3个宇航员就是他们的机器"。这些宇航员有许多的事情要做，除了吃饭、睡觉、锻炼以外，还要尽可能多做一些科学试验。任务之繁多，使得最佳方案问题远非明朗。NASA制定了一个方案，但又担心这个方案究竟还有多大的提高潜力。如果格雷厄姆能够证明在他们制定的方案的基础上提高不了几个百分点，那么航天局的官员们睡觉都会睡得更香。

国防部和NASA需要一个能找出最佳方案的确切办法。在数学中，这样一个确切的办法称为一种算法(algorithm)，取

名源自公元9世纪波斯算术家 Abu Ja'far Mohammed ibn Musa al-Khowarızmı 的姓的讹音。源自同一人名的还有 *algebra*(代数)一词。算法实际上就是一个步骤接着一个步骤的程序(就像产生单分数的“贪心算法”),其中的每一步都表达得很明白,以至于用人力也好用机器也好都可以如法炮制地将问题解出来。“奈克”地空导弹防御系统和 NASA 的这个问题,难就难在除了枚举和逐例检查这种原始的笨方法以外没有已知的算法可以确定最佳的方案。如果需要计划的任务数目庞大的话,原始的逐例检查法将无法得出结果。即使曾经以每秒2亿次的速度检查下棋的位置从而战胜卡斯帕罗夫(Gary Kasparov)的 IBM“深蓝”计算机,面对这无数种可能的情况也将一筹莫展。

迄今为止还未找到合适算法的最著名的计算问题就是推销员旅行问题:对于由一些城市和道路构成的网络,找出最短路径使得推销员经过每个城市恰好一次。如果城市和道路的数量较少,也许很容易找到答案,因为要检查的道路不多。对于一个较大的城市和道路网络,你也可能碰巧能找到最佳的旅行线路。但是,能够确保最佳答案的唯一已知办法仍然只是逐一检查各条线路这种低效的方法。

1971年,多伦多大学的斯蒂芬·库克(Stephen Cook)和苏联的利奥尼德·莱文(Leonid Levın)各自独立地证明推销员旅行问题、NASA 的计划问题以及其他许多似乎难以解决的计算问题在数学上都是等价的,即如果存在解决其中一个问题的有效方法,那么其他问题也可以类似地解决。但很多数学家都相信——尽管他们未能证明这一点——没有一种有效的算法能解决这类问题。寻找这类问题固有的不可解性的证明,是所谓的“复杂性理论”这一数学分支的神圣使命之一。

在没有希望得到有效算法的情况下,复杂性原理的学者

们已研究出寻找虽然称不上最佳,但仍不失为解决办法的方法。正因为如此,他们才把韦利·洛曼(Willy Loman)* 送上了路,尽管在理论上他也许还有捷径可走。尽管格雷厄姆的老板无需指派推销员挨家挨户去兜售电话,但也有许多跟推销员旅行问题一样的计算问题,如怎样设置话网中的通话线路效率更高,怎样布置集成片上的大量元件更为经济等等。罗纳德·格雷厄姆在他早期在贝尔实验室的工作中开创了确定某一方案与最佳方案之间相差多远的方法。这样,尽管他无法得到最佳答案,但他可以告诉你,你的答案离最佳答案究竟有多远。虽然在生活中格雷厄姆是一个不屈不挠的乐观主义者,但他却以"最坏情况分析"之父的身份在数学史中占有一席之地。

有些问题的最坏情况并不总是那么糟糕。考虑一下将一组重物分成两堆,使得两者总重尽量接近的问题。跟推销员旅行问题一样,这个问题虽然说起来简单,但也没有什么便捷的算法可以解决,尽管有一个办法可以找到不是最佳但还算好的答案。考虑下面 5 个重物的简单例子,其中有 3 个重物各重 2 磅,** 2 个重物各重 3 磅。在这个简单例子中,通过检查所有的可能性很容易得出确切答案,即 3 个 2 磅的重物为一堆,2 个 3 磅的重物为另一堆,可使两堆的重量相等。

3, 3　　　　　　2, 2, 2

然而,如果显著增加重物的数量,靠这种尝试法就没有指望了。此时,可以使用格雷厄姆建议的下述算法:从最重的重物开始一直试到最轻的重物,每一步都将重物放在能使两堆重物尽量相等的那一堆中。因此,在上述 5 个重物的简单例

* 小说《推销员之死》中的主人公。——译者

** 1 磅 = 0 454 千克。——译者

子中，你可以将最重的重物，即一个3磅的重物放在一堆：

3

然后，为了达到平衡，将次重的重物，即另外一个3磅的重物放在另一堆：

3　　3

接着，将第三重的重物，即一个2磅的重物放在任意一堆上（这显然无关紧要，因为两堆重物相等）：

3，2　　3

为保持平衡，将另一个2磅的重物放在较轻的一堆：

3，2　　3，2

最后，将剩下的一个2磅的重物放在任一堆：

3，2　　3，2，2

结果，这种算法并没有产生最佳答案3,3和2,2,2，但是它也没有产生像3,2,2,2和3这样明显失衡的划分。这种算法所产生的最重的一堆比最佳划分中最重的一堆（6磅）要重1磅，因此这种算法的偏差率为1/6（约16%）。据此——精彩的地方就在这里——格雷厄姆证明了对于两堆重物，不管其重量分布如何，这种简单易行的算法的偏差率不会高于16%。如果装卸工在给两辆卡车装货时能够遵循格雷厄姆的简单指令的话，那么装运结果相对于最平均的重量分布的偏差率将不会大于16%。要是运输大王们知道这一点的话——即使他们使用更精明的工人效果也不会更好——可以想象他们会有多高兴。

历史上类似的问题不胜枚举，其中许多以所谓装箱问题的形式出现。其思想是将一系列的物品装入一系列的箱子中使得总重量（或总体积）不超过某一数值。格雷厄姆指出，这些问题的表述五花八门："管道工需使用尽量少的标准长度的管子切出一系列不同长度的管子；电视网商希望利用尽量少

的节目间隙插播不同长度的商业广告；纸张制造商希望使用尽量少的标准纸张切出不同宽度的纸卷以满足客户的要求。”[8] 除此以外，格雷厄姆还举出另一个常见的例子：“一个人一手拿着各种不同的信件，一手是一堆二角五分的硬币，而面前却是一台出售标准信函邮票的机器。”[9]

处理这种装箱问题的懒办法是随机抽取物品并将每件物品放入适合它的第一个箱子内。这种名副其实的“第一适合”装箱法产生的结果并不理想。1973 年，普林斯顿大学的杰弗里·乌尔曼(Jeffrey Ullman)证明了这种算法产生的结果偏差可以高达 70%。如果较重的物品偏巧后装的话，这种算法产生的结果最差，因为此时在先装的箱子尚未装满之前就不得不动用新的箱子了。

有经验的装箱人都知道，如果把较轻的物品留到最后，就可以把它们装在接近装满的箱子的空隙处。由此可以得出一条较聪明的策略：在将各物品依次装入能容纳它们的箱子之前，先将这些物品由重到轻排序。毫不奇怪，有人证明这种“第一适合、由重到轻”的算法产生的偏差率不会高于 22%。1973 年，格雷厄姆在 AT&T 的同事戴维·约翰逊(David Johnson)成功地证明这种算法最适于实际应用，即没有任何有效的装箱策略能确保偏差率小于 22%。约翰逊的证明用纸多达 75 页，这就足以说明最坏情况的数学问题是多么的棘手。

在装箱问题中随处存在反直觉的异常情况而又没有什么直接的解决办法。格雷厄姆举出一个有 33 个重物而箱子的容量为 524 磅的例子：

442	252	127	106	37	10	10
252	252	127	106	37	10	9
252	252	127	85	12	10	9

252	127	106	84	12	10
252	127	106	46	12	10

按照“第一适合、由重到轻”的策略总共需要7个箱子，每个箱子装到524磅：

1号箱	442	46	12	12	12	
2号箱	252	252	10	10		
3号箱	252	252	10	10		
4号箱	252	252	10	10		
5号箱	252	127	127	9	9	
6号箱	127	127	127	106	37	
7号箱	106	106	106	85	84	37

但如果去掉46磅的重物，同样的算法却需要8个箱子而不是7个箱子！

1号箱	442	37	37						（剩余容量:8）
2号箱	252	252	12						（剩余容量:8）
3号箱	252	252	12						（剩余容量:8）
4号箱	252	252	12						（剩余容量:8）
5号箱	252	127	127	10					（剩余容量:8）
6号箱	127	127	127	106	10	10	10		（剩余容量:7）
7号箱	106	106	106	85	84	10	10	9	（剩余容量:8）
8号箱	9								（剩余容量:515）

这究竟意味着什么呢？假想你是伊梅尔达·马科斯

(Imelda Marcos),* 为离开宫中外出度周末而收拾各种鞋子。你把大大小小的各种鞋,从齐腿高的缀满宝石的靴子到简便的沙滩鞋,按照该算法的步骤装箱,结果发现需要 7 个箱子。转而一想,你发现不需要滑雪靴——因为你根本就不到有雪的地方去——于是你又把所有的鞋子倒了出来,把滑雪靴拿开,然后再仔细将其余的鞋装箱。天哪! 竟然还多要一个箱子,而这些鞋也装得不再紧凑,而是松松垮垮。你开始诅咒造物主把魔鬼塞进了你的箱子!

在二维化的装箱问题中也存在着反直觉的异常现象,如切曲奇的问题(在给定的面片上切出尽量多的曲奇来)和铺地砖问题(用给定形状和尺寸的地砖使得能铺满的地面更大一些)。在这些问题中,虽然不存在第三维,但问题并没有因此而简化。对于形状不规则的曲奇和地砖,还没有什么统一的策略能使结果优化;例如数学文献中还没有论述切曲奇问题的论文。但即使是最规则的形状,有时也会导致出人意料的结果。

考虑用不限量的 1 英寸 × 1 英寸** 的小地砖来铺一块很大的面积。如果这块面积是边长为整英寸数(比方说 1 000 000)的正方形的话,答案很显然就是长宽均为 1 百万块地砖的正方形网络。由于这 1 万亿块地砖铺满整个面积,这必然就是最佳铺法。然而,如果该面积仍为正方形,但边长变为1 000 000.1英寸的话,这 1 万亿块地砖就得在两条边上各留出一道 1/10 英寸的窄条来。有没有可能比上述铺法覆盖的面积更大一些呢? 要将这 1 万亿块砖挤乱从而再添进哪怕只是一块砖似乎都是不可能的事。1975 年,令组合数学界又

---

* 菲律宾前总统夫人,因有数以千计的各种各样的鞋而著称。——译者

** 1 英寸 = 2.54 厘米。——译者

惊又喜的是,埃尔德什和格雷厄姆通过巧妙地排布这1万亿块砖,使得它们之间呈小角度但间隙很小,从而加进去了不仅仅是1块砖,而是100 000多块砖!虽然格雷厄姆猜测1 000 000 100 000块砖的这一解法接近最佳答案,但他和埃尔德什都没能证明这就是使用小方块填充大方块的最佳可能方法。但迄今为止,20多年过去了,还没有人能够提出比他们这一方块填充法更好的办法来。正因为难以解决,才体现出努力的价值。

■

1987年1月下旬,在格雷厄姆的住处,埃尔德什正缠着他的主人。"他的脚指甲长得让他觉得麻烦了,"格雷厄姆说,"这些脚指甲也真是又脏又乱。他想让芳蓉帮忙给修剪一下,但芳蓉什么都好说,就是这件事干不了。"格雷厄姆让埃尔德什坐上一架前往圣安东尼奥的飞机去参加美国数学会和美国数学协会的年会。当时圣安东尼奥的市长亨利·西斯内罗斯(Henry Cisneros)在他的民主党政治生涯中正走红运,他宣布设立一个"数学日"以表示对莅临该市的2 575位数学家的欢迎,但他的这一姿态并没有赢得与会者对他事业的支持。这些数学家怀疑他是否见过一位数学家,更不用说是否知道保罗·埃尔德什的名字了。会议日程中包括讨论数学家们是否应该接受"星球大战"计划的资助以及国家保密局(加密和解密的需要使得该局成为美国数学家们最大的雇主)是否有资格成为美国数学会的团体会员。但除了几个热衷于此道的人以外,大多数数学家来圣安东尼奥是为了研究数学,而不是来此讨论伦理和政治的。在物理或精神分析会议上,与会者不可能去做亚原子粒子试验或者实行心理疗法,他们只是就此

进行讨论。但在数学会议上，与会者却真正在研究数学——在黑板上、餐巾上、桌垫上，在盥洗室的墙上以及在脑子里。

在这些会议上埃尔德什很少参加这些会谈，他更喜欢在宾馆的房间里同时和几位数学家一起工作。就在圣安东尼奥的某一天，埃尔德什在马里奥特宾馆占用了别人的一间房，同时和6位数学家讨论6个问题。他们凌乱地趴在两张双人床上和地板上。“647怎么样？它是素数吗？”其中一位胖胖的、像摩西*的人问道，“我的脑子已经算不出来了。”一位衣着斑斓的妇女来帮忙了。她拿出一本276页的通篇印满了200万以下所有素数(从2到1 999 993共148 933个素数)的书。上面确实有647这个数。

埃尔德什似乎没有注意到这个插曲。他歪歪斜斜地坐在椅子上，双手捧着脑袋，就像疗养院里的残疾老人。但每过几分钟，他就要猛然抬起脑袋，给某一位同事指点两句。接着，经他指点的人便遵照大师的建议埋头干上一阵，其他人则耐心地等待着埃尔德什在他们的问题上忽发灵感。但他们也有上当的时候。埃尔德什抬起头来，他们立刻凑过来，希望有什么启发。可埃尔德什说出来的并不是什么数学灵感，而是与死亡有关的一句警醒之言——“不久我就要摆脱生命这一不治之症了”或是“就像生命一样，这种会议不久就要到头了；但比起生命来，它还是让人高兴多了”，然后又把头埋了起来。对这些言论，大家都不在意，整个上午就是这种数学灵感和对死亡的沉思的循环交替。

“10年后，”那个像摩西的人说道，“我希望你帮我和上帝谈一谈。”

“你想从上帝那里得到什么？”埃尔德什问道。

---

* 《圣经》故事中古代犹太人领袖。——译者

“我想看看‘天书’。”

“没有人能看到‘天书’。最多你只能瞥上一眼。”

“摩西”打开了电视。“电视就是俄国人发明用来扼杀美国人的教育的东西。”埃尔德什说道。电视上播放着新闻，罗纳德·里根(Ronald Reagan)占据了整个屏幕。“艾森豪威尔(Eisenhower)是一个高尔夫球迷，但他水平不怎么样，”埃尔德什说道，“当时有人说可以选一个高尔夫球手，但为什么不选一个水平高的高尔夫球手呢？依我说，选一个演员也行，但为啥不选一个就像卓别林(Chaplin)那样的好演员呢？”里根消失了，电视里讲起一个有关艾滋病的故事。“这些男男女女都告诉我人们并不是那么淫乱的，”埃尔德什又说道，“但我还是不得而知。”话题一旦偏离数学和死亡，那准说明埃尔德什厌倦了，准备寻找新的数学慰藉。

2小时再加上5毫克苯齐巨林之后，埃尔德什又坐到了返回格雷厄姆住处所在的纽瓦克市的班机上。从那儿他将迅速走遍孟菲斯、博卡拉顿、圣胡安、盖恩斯维尔、海发、特拉维夫、蒙特利尔、波士顿、麦迪逊、迪卡尔布、芝加哥、尚佩恩—厄巴纳、费城，然后又回到纽瓦克。但格雷厄姆还是提醒他在他的日程安排中注意一个小小的问题：“保罗，有两位在不同国家的数学家希望你的脑子能同时向他们开放。”

“你听说过我母亲的定理了吗？”埃尔德什说，“我母亲说过‘在同一时间，即使是你，保罗，也只能在一个地方。’也许不久我就将不受这一限制了。也许一旦我离开了这个世界，我就可以同时在不同的地方了。也许到时我将可以与阿基米德和欧几里得合作了。”

第 4 章

些微报复

托马西纳:如果你都不教我万物的真谛,那还有谁能教我呢?

塞普提莫斯:哦,是啊。真对不起。肉体的交媾就是性交,也就是雄性生殖器插入雌性生殖器中以便繁殖后代和取乐。与此对照鲜明的是,费马大定理说,若 x,y 和 z 都是整数,则当 n 大于2时,x 的 n 次方和 y 的 n 次方之和不可能等于 z 的 n 次方。(停顿)

托马西纳:呃……

塞普提莫斯:可定理就是那么说的。

托马西纳:真是让人既厌恶又费解。我长大了要是这么做,每次肯定会想起你的。

——汤姆·斯托帕德(Tom Stoppard)

《淳土风情》第 1 幕第 1 场

1974 年 4 月 8 日傍晚,天气温和而多云。道奇队左手投球手阿尔·唐宁(Al Downing)对着汉克·阿伦(Hank Aaron)宽敞的击球区投了一个高高的快速直球。9 时 07 分,阿伦挥动球棒将球一击,球飞过围栏呈弧线状一直深入到左中外场。至此,阿伦的 715 次本垒打突破了巴比·鲁思(Babe Ruth)于 1935 年创下的 714 次的纪录,亚特兰大的 53 775 位本地球迷欢声

雷动。"感谢上帝,总算完了。"阿伦说道,就像一位花了40年时间总算解决了一个难题的数学家一样松了一口气。佐治亚大学的数学家卡尔·波梅兰斯回忆说,一连几个月,714和715这两个数字一直挂在亚特兰大球迷的嘴边,"像'你认为他什么时候能得715?'这类问题的意思已变得妇孺皆知,根本就不用提鲁思、阿伦或者本垒打这些名词。"[1] 当时还是一位年轻助教的波梅兰斯注意到714和715的乘积还是前7个素数的乘积:

$$714 \times 715 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17$$

波梅兰斯的一位同事的学生还发现了714和715的另外一个有趣的性质:714的各素因子之和等于715的素因子之和,也就是:

$$714 = 2 \times 3 \times 7 \times 17$$
$$715 = 5 \times 11 \times 13$$
$$2 + 3 + 7 + 17 = 5 + 11 + 13$$

波梅兰斯把具有这种性质的连续整数叫作鲁思—阿伦数对。这种数对极为稀罕。波梅兰斯使用计算机搜索20000以内的鲁思—阿伦数对,结果只发现26对,其中最小的是5和6,最大的为18490和18491。尽管随着数字的增大,鲁思—阿伦数对变得越来越稀少,但波梅兰斯还是觉得这种数对是无穷无尽的,只是无从证明自己的感觉。波梅兰斯以一篇小论文的形式将他的发现发表在《娱乐数学杂志》上。文章发表后不到一星期,他便收到埃尔德什来的电话。当时他们还从未谋面。这位数论大师说他已经证明波梅兰斯的猜想,并希望被邀请来亚特兰大给出他的证明。后来的会晤开始了这两个人的合作,并导致了21篇论文的发表。

1995年,埃尔德什和阿伦被埃默里大学授予了名誉学位。就像其他被授予名誉学位的人一样,埃尔德什也戴着帽

子，穿着长袍。但不同的是，埃尔德什脚下穿着便鞋，双手捧着脑袋坐在主席台上，在仪式举行的过程中一直在他的一本数学笔记上写写画画。波梅兰斯将关于鲁思—阿伦数对的事都讲给了这位本垒打之王听。“他确实有绅士风度。”波梅兰斯说，“我告诉他，他的所作所为也改变了我这位无名小辈作为数学家的一生。在整个过程中，他一直耐心地倾听着我的解释。”[2] 波梅兰斯恳求埃尔德什和阿伦在他的一个垒球上签了名。“因为这件事，”波梅兰斯说道，“汉克·阿伦的埃数变成了 1。”[3]

以皮埃尔·德·费马的结果为基础，埃尔德什和波梅兰斯在素数方面进行了重要的合作。费马在 1640 年的一封信中提出一个猜想（但他没有给出证明）：如果 n 是素数，则对于任何整数 a，a^n-a 是 n 的倍数。例如，因为 3 是素数，所以对于任何整数 a，a^3-a 应是 3 的倍数。如 $a=2$，$2^3-2=6$，6 显然是 3 的倍数，命题真；如 $a=3$，$3^3-3=24$，也是 3 的倍数；如 $a=4$，$4^3-4=60$，仍然是 3 的倍数。你可以设想按照这一方法无限地进行下去。

费马关于素数的这个猜想后来被称为“费马小定理”，以别于著名的“费马大定理”。但就其意义来说，费马小定理一点也不“小”。这个定理直到将近一个世纪以后才被欧拉证明，并成了检验一个数是否为素数的许多现代方法的基础。

为检验 n 是否是素数，从 2 开始选择不同的 a 值，看 a^n-a 是否是 n 的倍数。如费马检验在任何一个数处出现否定，则该数是合数。例如，为了检验 9 是否是素数（读到这里，你一定知道 9 究竟是不是素数了），可以看 2^9-2 是否是 9 的倍数。很显然，$2^9-2=510$ 不是 9 的倍数，所以 9 没通过素数检验。如一个数通不过素数检验，则这个数肯

定不是素数。但如果一个数通过了素数检验，它也有可能不是素数。

2 500 年前，中国的数论学者曾错误地认为，如果表达式 2^n-2 是 n 的倍数，则 n 是素数。因为 $2^5-2=30$ 是 5 的倍数，所以 5 是素数；因为 $2^7-2=126$ 是 7 的倍数，所以 7 是素数。虽然 340 以内通过这种方法没有合数混入素数的行列，但合数 341（11×31）却能整除 $2^{341}-2$。341 是唯一混进素数的冒牌货吗？不是！奇数的伪素数有无数个。1950 年，D.H. 莱默发现了第一个偶伪素数 161 038。到 1951 年，数学家们已经知道偶伪素数也有无限个。然而，对其他的 a 值使用费马检验可以把这些“伪素数”筛掉。例如，341 这个“骗子”就不能整除 $3^{341}-3$，因而暴露了它合数的真实身份。

有没有这样一个合数 n，它既能整除 2^n-2，又能整除 3^n-3，4^n-4，5^n-5，6^n-6 等等？换句话说，有没有一个绝对的伪素数对所有的 a 值都能混过费马检验？答案是肯定的。1910 年，美国数学家罗伯特·卡迈克尔（Robert Carmichael）发现了第一个也是最小的一个绝对伪素数 561。对任意 a 值，费马表达式 $a^{561}-a$ 都是 561 的倍数。这些绝对伪素数，被称为卡迈克尔数，如 1 105，1 729，2 465，2 821，10 585，和 15 841 等，它们使得费马检验无法准确无误地确定一个数是否素数。在一段时间内，人们希望这些绝对伪素数是数量有限的从而可以用一个清单将它们开列出来。这样，如果待检数 n 不在清单上且对于越来越大的 a 值都通过了费马检验，我们就可以越来越相信这个数真的是素数。1956 年，埃尔德什提出一种构造数值较大的绝对伪素数的方法，并认为（但没有证明）这些“骗子”是无穷无尽的。1992 年，佐治亚大学的卡尔·波梅兰斯和他的两个同事总算最后对埃尔德什的想法给出了铁的证明。

■

尽管只过了一个世纪欧拉就证明了费马小定理,但350多年过去了,一代又一代最优秀的数学家却始终未能证明看来似乎更简单的费马大定理。17世纪30年代末,费马宣称自己证明了这一定理,但令人不悦的是他要保密。费马大定理直到1994年才真正得以证明。经过8年近乎秘密的工作后,普林斯顿大学的安德鲁·怀尔斯(Andrew Wiles)总算大功告成,给出了一个又长又晦涩的证明。对这种闭门造车的作法,埃尔德什不以为然。他认为,如果怀尔斯能让数学界介入他的工作,也许完成证明会早一些。显然怀尔斯是担心如果他的工作不保密的话,别人或许会将他甩在后面,甚至会嘲笑他是堂吉诃德与风车作战。为了引开同事们的注意力,怀尔斯在那些年发表了一系列无关紧要的论文。"这么多年来一直不泄漏自己的工作,也不谈论自己工作的进展情况,就我所知,这大概是绝无仅有的一例。"[4] 肯·里贝(Ken Ribet)——他的工作对于怀尔斯的证明也是不可或缺的——说道,"数学家总是不断地相互交流的。在你和别人的交谈过程中你也会受到启迪:人们会告诉你,你的工作是多么重要,还会给你出主意。那是一种营养之源。一旦切断这种联系,你的工作甚至可能是一种心理不正常的行为。"

正常也好,不正常也好,反正怀尔斯摘取了荣誉的桂冠,因为他解决了数论中一个最具浪漫色彩的悬而未决的问题。从来没有一位数学家像他一样名声鼎沸。《人物》杂志将他列为"当年25位最有魅力的人物"之一,盖普公司* 邀请他为他

---

* 美国著名的休闲服装连锁店。——译者

们的牛仔服装作广告模特，而芭芭拉·沃尔特斯（Barbara Walters）* 则邀请他出席她的演出。"芭芭拉·沃尔特斯是谁？"[5] 连电视都不看的怀尔斯问道。

以这一证明为题材捏造的新闻故事也蜂拥而至，塞满了数学家们的电子信箱。

> 芝加哥，7 月 30 日。"数学流氓最难对付。"芝加哥警方的一位发言人说，"但是我们已经从比伯巴赫暴乱中吸取了教训。这一次我们严阵以待。"
>
> 星期三当费马大定理被攻破的消息传开后，在全国各大学里大规模的执法行动防止了一贯伴随着庆祝高难数学问题取得重大突破的狂欢骚乱。
>
> 遍布海德公园的骑警及时制止了芝加哥大学疯狂的人群掀翻汽车。1976 年当沃尔夫冈·哈肯和肯尼思·阿佩尔攻克了长期困扰人们的四色问题时就发生了这类事件。但该校数学系否认与将市民从汽车中拉出来的事件与扔教科书一事有关。[6]

皮埃尔·德·费马于 1601 年出生在法国南部一个富庶的皮革商家庭。他虽然从小就很聪明，但并没有表现出对数字的特殊兴趣。受家庭鼓励的影响，费马跻身仕途并一度做到路易十四王朝的一位法官。白天，费马将犯人送上火刑柱，而晚上则大多独处，因为法国法律不允许他和别人交往过密以免这些人出庭时影响法律的公正。这种隐士般的夜生活倒很适合他。他阅读古代历史和科学著作并发现了数学这个世界。不久，数字就成了他主要的夜间情人。即使以费马那样杰出的数学才能，要以数学为生也并非易事。17 世纪初，欧洲还正在从黑暗时代中苏醒过来，人们还不把数学当作是一项高贵的行业。有点数学才能的人可能被雇去当一个会计，

* 美国著名演员。——译者

为富商管理账目,工作性质也是秘密的。这种秘密工作的传统甚至影响到与富人账簿无关的数学家,费马也不例外。对于自己的数学发现,他也倾向于保密。尽管费马偶尔也在信中宣称自己证明了某某定理以引起同事对这些问题的注意,但他并不交代具体细节,而是让他们自己去寻找证明。

1637年,他阅读了由一位神秘的代数学家丢番图(Diophantus)写的《算术》的拉丁文版。有关丢番图这位古希腊的思想家,我们知之甚少。我们只知道他生活在亚历山大这座作为数学中心长达700年[从欧几里得生活的时代一直到公元5世纪初希帕蒂亚(Hypatia)这位有史以来第一位女数学家的去世]的城市,至于他生活在这里的确切年代还无从得知。科学史家们通常将他的生活年代定在公元3世纪中叶,但他们又承认这一判断的证据严重不足,以至于认为其生活年代的不确定性有可能上下达500年左右。

丢番图的《算术》原本有13卷,留存至今的只有其中的6卷,其余各卷可能毁于烧毁亚历山大图书馆的那两次大火:一次是在公元前47年朱利乌斯·凯撒(Julius Caesar)焚烧克娄巴特拉(Cleopatra)的舰队时火焰窜到了附近的图书馆;另一次是公元642年穆斯林入侵者将这座城市洗劫一空时烧毁了其余的大部分书籍。侥幸留存下来的这6卷《算术》可谓是稀世之宝。从这些书籍看来,丢番图比毕达哥拉斯更保守:后者虽然否认像2的平方根这类无理数,但毕竟还乐于接受分数并把它们看作是整数的兄弟;而丢番图却只喜欢整数。他以善于解决答案为整数的问题而著称,这类问题现在称为丢番图方程。

在公元5世纪或6世纪的一部记载问题的书《希腊文集》中有一个古老的问题。在有关丢番图的为数不多的记录中,这是一份难得的资料,丢番图的生活可从中略见一斑:

上帝给了他 1/6 的少年生活，又过了 1/12 给他两颊添了毛。再过 1/7 后给了他婚姻的光明，婚后 5 年给了他一个儿子。唉！迟到的可怜孩子，才活了他父亲寿命的一半，残酷的命运便夺走了他的生命。上帝用这数字的科学来弥补他的失子之痛，但 4 年之后他也离开了人间。

除提供有关丢番图的神秘生平资料外，这个谜是数学的慰藉可以帮助摆脱现实生活痛苦的最早表述，因而特别值得一提。谜中包含的信息可以表述为一个简单的代数方程——一个丢番图方程，式中的 D 代表丢番图的寿命：

$$D = D/6 + D/12 + D/7 + 5 + D/2 + 4$$

每一个在代数课上专心听讲的小学生都知道怎么解此方程求得 D 值。假如这个谜可信的话，那么丢番图活到了 84 岁。对于一个生活在公元 3 世纪的人来说，这已是不短的寿命了。

解这个谜的方程是一个一次方程，也就是说书中没有 D 的高次方出现。但丢番图本人感兴趣的通常都是更复杂的方程，即其中的变量是二次方、三次方或更高次方。在《算术》一书中，丢番图花了相当长的篇幅来讨论毕达哥拉斯定理，即"在任何直角三角形中斜边的平方等于其余两边的平方和"这个大家熟知的定理。丢番图还注意到，存在无限多组满足毕达哥拉斯定理的 3 个整数，即方程 $x^2 + y^2 = z^2$ 的整数解 x, y, z。（公元前 1900 年的普林顿 232 泥版文书* 上就刻有该方程的解，说明在毕达哥拉斯之前 1 000 年，古巴比伦人就知道具有这种特性的三个数，诸如 3,4,5 和 5,12,13。）

费马在读到丢番图的讨论时想道：如果指数大于 2，同样

* 以收藏者普林顿(Prmpton)命名，232 为收藏编号。——译者

的方程还有没有整数解呢？换句话说，有没有这样的3个整数，满足方程 $x^3+y^3=z^3$ 或 $x^4+y^4=z^4$ 或者甚至是 $x^{707}+y^{707}=z^{707}$? 尽管当指数为2时方程有无限多个解，但费马却令人意外地断言：当指数大于2时，该方程根本就没有解。在他读过的《算术》一书的页边，他写道（译自拉丁文）："不可能将一个数的立方写成两个数的立方和，也不可能将一个数的四次方写成两个数的四次方之和；一般地，当 n 大于2时，不可能将一个数的 n 次方写成两个数的 n 次方之和。"就在这个影响深远的命题——即费马大定理——的后面，他加了一句："我对这个命题有了一个绝对漂亮的证明，只是这儿地方太小写不下。"费马死于1665年，要不是他的长子克莱门特·萨缪尔（Clement - Samuel）在1670年清理那本已经卷角的《算术》，并公开发表这个旁注的话，该定理恐怕就要随着费马一起进坟墓了。

旁注发表后立刻风靡一时，并吸引了很多数论专家。要是把这几百年来试图证明费马大定理的男男女女的名字列在一起，读起来就像一本数学名人录。费马本人确实给出了指数为4时的定理的简要证明。大数学家欧拉也曾一度被这个问题迷住，但由于进展甚微而灰心丧气，以至在1742年他派了一位朋友去搜查费马原来住的屋子，看看费马说在旁注里写不下的究竟是什么。可那位朋友回来时还是两手空空。欧拉潜下心来，终于证明了3次方的费马大定理无解。这样，$x^3+y^3=z^3$ 和 $x^4+y^4=z^4$ 就算是攻克了，剩下的是无数其他的情形：

$$x^5+y^5=z^5$$
$$x^6+y^6=z^6$$
$$x^7+y^7=z^7$$
$$x^8+y^8=z^8$$

等等。

接下来真正的进展是由索菲·杰曼(Sophie Germain)取得的。杰曼1776年生于巴黎,父亲是富裕的银行家。1789年法国大革命的烈焰在巴黎街头蔓延,把杰曼囚在安全的家中。杰曼整天呆在父亲的书房里。就在那里,她读到一段有关阿基米德之死的生动描述,将这位13岁的女孩吸引到数学之中。据说,这位锡拉丘兹的老人坐在地上,对着画在土里的几何图形凝思,一点也不知道罗马士兵已经攻入他所在的城中。一名士兵从他身后走了过来,挑衅般地踩在他画的图上。“别踩我的圆!”阿基米德喝道。这时,士兵抽出了剑,杀死了这位75岁的数学老人。杰曼决心将自己的一生献给具有如此大的吸引力以至让人在生命和身体遭受危险的时刻——就像恐怖正笼罩着她的屋外一样——仍能置之度外的数学。

然而,杰曼的父母却不以为然,他们把数学书籍藏了起来。当时中产阶级认为女人不宜用数来麻烦自己,杰曼的父母也不例外。为免遭白眼,杰曼利用深夜将这些书找出来仔细研读。她父母发现这一情况后曾采取极端的方式阻止她。等她上床后,他们把她的衣服、热源和灯都拿走了,很显然是为了让她难以从被子里钻出来。但当得知女儿自备蜡烛,仍然坚持自己的做法后,他们终于接受她的数学热情,甚至支持她从事数学了。

但法国社会的“启蒙”并没有这么快。1794年建校的巴黎综合工科学校禁止女生入学,但这位足智多谋的18岁女孩还是想方设法弄到了课堂笔记。她冒称是从巴黎综合工科学校退学的一位颇有才华的学生安东尼—奥古斯特·勒·布朗(Antoine - August Le Blanc)并开始与一些一流的数学家通信。杰曼在她20多岁时发现了适用于指数 n 为某些特定素数的费马大定理的证明方法。(在数学文献中,后来将具有这种特

性——即将该数乘以 2 后再加 1 得到的是另外一个素数——的素数称为索菲·杰曼素数。第一个索菲·杰曼素数为 2,因为 2 乘以 2 再加 1 后得到另外一个素数 5。1998 年 1 月 19 日发现的已知最大的索菲·杰曼素数有 5122 位数字,[7] 它等于 $92\,305\times2^{16\,998}+1$。也就是说,将 $92\,305\times2^{16\,998}+1$ 乘以 2 再加 1 后得到另外一个素数 $92\,305\times2^{16\,999}+3$。至于索菲·杰曼素数是否也与素数本身一样无穷无尽,现在还不清楚。)

杰曼使用她的男性化名字将她有关费马大定理的研究写信告诉了当时最著名的数学家和天文学家之一、格丁根大学的卡尔·高斯教授。信以致歉开头:"很不幸,我的胃口超过我的智力。给有您这样才华的人添麻烦,我深感鲁莽。"[8] 高斯的回信给了杰曼鼓励:"算术能找到像您这样能干的朋友,我很高兴。"

直到 1807 年,高斯才知道杰曼的真实身份。当拿破仑的军队进入普鲁士时,杰曼担心高斯会遇到像阿基米德一样的遭遇。于是,她就找到她认识的一位在法国军队的指挥官,要他确保高斯的安全。这位指挥官把高斯找了出来,告诉他其生命安全得益于一位名叫索菲·杰曼的人的干预。高斯一点也不知道这位神秘的恩人是谁,直到杰曼在其后的信中承认了自己使用假名后他才清楚是怎么回事。高斯为这一事情十分高兴:"喜欢一般抽象科学的女人就很少,特别是喜欢神秘数字的女人更是凤毛麟角……按照传统的观点和偏见,女性要通晓这些棘手的研究领域,遇到的困难要比男性遇到的大得多。而当这样一个性别的人最终克服了种种困难,成功地深入到其中最难以理解的部分时,那么毫无疑问,她必然具有最大的勇气、杰出的才能和过人的天资。"[9]

高斯和杰曼虽然互通信件并相互敬仰,但他们从来没有见过面。高斯说服了格丁根大学给杰曼授予荣誉学位,但她

在从法国出发之前就死于与之搏斗了两年之久的乳腺癌,享年55岁。"就高斯来说,像对她这样的善举并不多见。"埃尔德什评价说,"高斯很吝啬,尽管比牛顿好一些。当他的学生把他们的工作告诉他时,他常常会跟他们说这些工作他早已做过。或许他已经做了,或许并没有做。但泯灭了年轻学生们的热情,那总是不对的。"

继杰曼的开拓性工作之后,德国数论家恩斯特·爱德华·库默尔(Ernst Eduard Kummer)于19世纪40年代后期取得了有关费马大定理的另一个重要进展。库默原先教高中数学,后来在柏林的军校里教炮弹弹道学。虽然许多数论家都炫耀自己的工作没有实际应用,但库默尔却以能将自己一流的数学脑袋用于为祖国的军事服务而自豪。他要报仇。他在3岁时就亲眼目睹了他的家乡索兰遭到拿破仑军队的蹂躏,这些法国军队带来的伤寒传染病更使得人民雪上加霜。当时库默尔的父亲是镇上的医生,他竭尽全力阻止病魔的肆虐,最后自己也因感染该病而死亡。

虽然库默尔没有忙于遏制法国军队,但对法国数学家他却这样做了。法国科学院曾悬赏3000法郎证明费马大定理,而有关两位巴黎数学家加布里埃尔·拉梅(Gabriel Lamé)和奥古斯丁·路易斯·柯西(Augustin - Louis Cauchy)为抢先完成证明而进行的一场丑陋的竞争也在当地的街谈巷议中闹得沸沸扬扬。这两位数学家各自使用的证明方法传到德国后,库默发现它们都有其致命的漏洞,于是给法国科学院写了一封信。拉梅和柯西颇为难堪,从此便将他们的注意力集中到了较容易的数学问题上。

库默尔证明当指数为某特定类型的素数(他称之为"正则素数")的无限多种情况下的费马大定理。库默尔的证明方法是对费马大定理的第一次全面进攻,尽管"非正则素数"的存

在限制了这一方法的普遍性。而所谓“非正则素数”也并不很多,例如,在 1 至 100 之间就只有 3 个这样的素数,即 37,59 和 67。[别管到底什么是正则素数,它的定义复杂得连大数学阐释者约瑟夫·路易斯·拉格朗日(Joseph - Louis Lagrange)都望洋兴叹。他相信,“如果一个数学家对自己的研究没有明白到走上街头就能向迎面碰上的行人解释清楚的话,那么他对自己的研究工作就理解得还不透彻。”[10]要是真采用他这种一厢情愿的标准的话,恐怕大多数数学家都只能关门大吉了。]

尽管库默尔在数论的前沿贡献杰出,他的初等算术却显然很糟糕。据传,有一次他站在黑板前竭力计算 7 乘以 9 等于多少。“啊,”库默对他的中学生们说,“7 乘以 9,嗯,等于,嗯……”“61,”一位学生抢着说。“对,”库默说着,就将 61 写在黑板上。“不对!”另一位学生喊道,“应该是 69。”“得了,得了,同学们,”库默说,“不可能两个都对,答案只能是其中的一个。”(埃尔德什喜欢讲这个故事的另一翻版:“库默自言自语道,‘嗯,它们的乘积不可能是 61,因为 61 是素数;也不可能是 65,因为 65 是 5 的倍数;67 也是素数,69 又太大——那就只能是 63 了。’”)

进入 20 世纪以来,有关费马大定理的证明活动异常活跃,但大多数努力都误入歧途。1908 年,德国科学院超过法国科学院悬赏 10 万马克。提供这笔奖金的是达姆施塔特的一位工业家和业余数学家保罗·沃尔夫斯凯尔(Paul Wolfskehl)。[11]沃尔夫斯凯尔声称就像几何学让阿基米德送了命那样,数论救了他的命。由于遭到他朝思暮想的那位妇人的拒绝,沃尔夫斯凯尔绝望之至,看来只有自杀才是唯一的解脱。他虽然性格冲动,但他还是没有当场自杀,而是决定为将自己的事情安排好而定一个自毙的确切时间。结果留出的时间多了,他整理完东西后发现在自杀时间之前还有几个小时

需要打发 沃尔夫斯凯尔走到自己的书房,在翻看数学书籍时偶尔发现了费马大定理。他一时沉醉于试图证明这一定理的思考而忘记了自己的死亡之约。这使沃尔夫斯凯尔认识到,深爱一个自己得不到的女人远不如思考复杂的数学问题更值得。于是他又轻装上路重新生活,并悬赏将费马大定理制服。

但费马大定理就是不服。10万马克的沃尔夫斯凯尔奖激励了大批的业余和专业数学家寻找费马大定理的证明——或者是反例也行。在大奖宣布的当年,即1908年,就有621人提交了各自的证明。到了20世纪70年代费马大定理的证明仍然蜂拥而至,其中除了那些荒谬的证明稿被当即返回以外,其余看起来有点像数学的证明由格丁根大学数学系的F·施利希廷(F.Schlichting)审核。施利希廷在1974年写道:"一时间我成了牺牲品。每个月都要回复三四封信,在源源不断的来函中更不乏滑稽荒诞之作。比如说有一个人就只寄来了证明的前半部分,并声称如果我们能给他预支1 000马克的话,他就再把后半部分寄来。还有一个人声言,要是我能现在资助他的话,等他功成名就之后将从他的出版和广播电视采访收益中分10%给我;否则,他还威胁说,他将把证明寄给俄国某大学的数学系,让我们得不到发现他的殊荣。不时地还有人出现在格丁根大学坚持说要面谈才行。"[12]其他一些大学经常采用固定格式的辞令来应付那些疯子:"对于您证明该定理的这一尝试,我有绝妙的方法可以说明它是错误的;但此处限于篇幅,不便写下。"同时,主流数学家仍在不断验证对于不同的指数,费马大定理都正确。到1993年为止,数学家们已经肯定,即便存在反例的话,费马大定理中的指数也得在400万以上。

■

解决费马大定理的命运落在牛津一位神学家的儿子安德鲁·怀尔斯的头上。他的数学兴趣也是源于阅读费马的浪漫故事,就像在他以前索菲·杰曼被对阿基米德的神奇描述吸引到数学中来一样。怀尔斯 10 岁时就阅读了埃里克·坦普尔·贝尔的著作《最后的难题》(1961 年)。作为 20 世纪上半期美国杰出的数学家,贝尔不仅是一位数学奇才,他的文字功夫也是不可多得的。那些探索到数学真谛的人的经历,贝尔写道,"是任何浅尝辄止的人无法感受到的"。[13]他擅长于精辟地概括一个人的性格。他说,毕达哥拉斯的神秘主义阻碍了他的数学研究,他是"十分之一的天才加上十分之九的呓语"。[14]尽管他的文风有时不免过于华丽,但他的《最后的难题》以及他于 1937 年出版的广为流传的《数学精英》却在三代读者中撒下了数学的种子。

1937 年贝尔独辟蹊径,在作品中将数学家们的生活及爱情故事和他们的数学工作欢快地糅合在一起。在我们这个小报泛滥的时代这似乎算不了什么,但在那个时代这无疑不啻一次创新。我们来看他对笛卡儿的描写:"他虽然思维深邃,却不是一个衣着肮脏、胡子花白的学者。相反,他身穿塌夫绸衣服,腰挎宝剑,一副入时的打扮……更令他显得华贵的是他还戴着一顶插着鸵鸟毛的宽边大帽。如此打扮,他随时准备制服那时把教堂、社会和街头闹得鸡犬不宁的歹徒。有一天晚上当一个醉鬼骚扰笛卡儿的意中人时,这位怒气冲冲的学者直扑那个愚鲁之徒……他轻而易举地夺下了那个酒鬼手中的剑,却又饶了他的小命,倒不是因为他的剑术糟糕,而是他不愿当着美人的面屠宰如此肮脏的东西。"[15]读贝尔的作品

时，只有那些木瓜脑袋才不被数学所吸引，在这个世界里有的是佩剑的才子。

年轻的怀尔斯被贝尔讲述的费马大定理迷住了。怀尔斯回忆说："表面上这个定理是如此的简单，而历史上最优秀的数学家却都没能解决它。我那时虽然只有10岁，但也能理解这个问题。从那时起，我就知道我不会放过它的。我一定要战胜它。"[16]贝尔对费马大定理的叙述在他死后的1961年才公诸于世。贝尔预言说，还没等到解决费马大定理，人类文明就将在核战争中自行毁灭。加利福尼亚大学伯克利分校的数学教授肯·里贝感兴趣的是，要是贝尔能多活几十年的话，"他将惊诧于什么呢？是人类的依然存在，还是1993年6月23日费马大定理的证明？"[17]怀尔斯十几岁时即着手证明费马大定理，但由于毫无进展，后来便转而研究现代数学中的一个热门课题——即所谓的椭圆曲线（它们比简单的椭圆更加复杂）——以便能完成剑桥大学的博士论文。在其后10年内怀尔斯一直将费马大定理置诸脑后。

1986年，肯·里贝证明：有一个尚未被证明的猜想，即所谓的谷山—志村猜想，能够导出费马大定理。对此他自己都颇觉诧异，因为这意味着若能证明谷山—志村猜想，那么也就证明了费马大定理。可是证明谷山—志村猜想也并非易事，因为那时这个猜想已公布30年却依然无人证明，而且首先提出这个猜想的两人中已有一人去世，已经无法给试图证明这一猜想的人提供真知灼见了。数学的魅力挽救了保罗·沃尔夫斯凯尔，却无法将谷山从思维的痛苦深渊中解脱出来。1958年，第二次世界大战后日本最优秀的数学家之一、年仅31岁的谷山自杀身亡。

怀尔斯得知里贝的结果后，费马大定理的火焰再次在他心中熊熊燃烧起来，可这一次他的军火库中又多了一件先进

武器:谷山—志村猜想涉及到椭圆曲线,而他在完成博士论文期间的工作已使得他对此娴熟于心。但是怀尔斯仍没有必胜的把握。“谷山—志村猜想毕竟已经公布那么多年了,”[18]怀尔斯后来说道,“可是没人知道从什么地方下手去证明它。好在这毕竟是主流数学,即使我得不到完满的答案,从数学上讲为此努力仍将是值得的。我相信我的精力不会白费。这样一来,这个困扰我一生的费马大定理就和一个从职业上讲可以接受的问题融合在一起了。”就这样,他蜷缩在自己阁楼上的办公室里开始了7年的秘密工作,阅读了他能找到的有关谷山—志村猜想的所有资料。“开始几年我知道我没有竞争对手。”怀尔斯说道,“因为我知道谁也不知道从那儿下手。连我自己也不例外。”[19]然而随着时间的推移,事情就慢慢露出头绪来了。怀尔斯把他的经历比作“进入一座黑暗的楼房。你走进一间屋子里,连年累月跌跌撞撞,一不小心就碰上什么家具。慢慢地你就知道家具都在什么地方了,并开始寻找电灯开关。你打开电灯,满屋霎时透亮。然后你又进到另外一间屋子并重复以前的经历。”[20]

到1993年,整个大楼都灯火通明了,但他仍然不让其他任何人进入大楼,以便他能一遍又一遍地检查他那长达200页的证明。同年6月,他回到他的母校剑桥大学去进行一系列的讲座,他还给自己的讲座取了一个深藏不露的题目:“模形式、椭圆曲线和伽罗瓦表示法”。一连三天,他只是埋头演讲,只字不提这些讲座将会导致什么结果。到第三天,前来听讲的数学家已多得没有座位了,因为许多人已经开始预料到他会将大家引向什么地方。“怀尔斯的讲座只可能有一个高潮,一个唯一的结果。”[21]里贝说道,“我来得较早,坐在前排。我带着相机,准备拍下这一历史时刻。屋子里的气氛很紧张,人们都异常兴奋。我们都感觉到自己是这一历史时刻的参与

者。讲座开始前和结束后人们的脸上都带着笑容。几天的讲座已经把人们的情绪抬了起来。”[22]当讲座的最后时刻来临之际，怀尔斯在黑板上写下最后一个命题后平静地说道：“这就证明了费马大定理。我想我的讲座该结束了。”[23]好一会讲演厅里出奇地宁静，然后就是如雷的掌声，大家都站立起来为怀尔斯鼓掌喝彩。

但怀尔斯那时的感情却很复杂。他感到有些忧伤。“所有的数论家在他们的内心深处都有这种感觉。”他说，“对于我们中的很多人，这个问题将我们紧紧吸引住。我们一直认为它是梦中之物，却从未切实地去做。实际上，这是一种失落感。”[24]

6月24日，怀尔斯成了《纽约时报》的封面人物（标题为：终于对古老的数学问题喊出了“尤里卡”！*），全世界都称他为“数学的屠龙者”，这位戴着眼镜、不善交际的怀尔斯顷刻间誉满全球。更值得一提的是，正如里贝跟《时代》周刊所说的那样，只有0.1%的数学家能够理解这个技术性很强的证明。[26]格雷厄姆说：“而那个百分比很有可能还是乐观的估计。”

证明过程确实技术性很强，以致一开始没人看出来事实上龙还没有断气。到了8月下旬，怀尔斯的一个同事悄悄地告诉他要注意证明中的一个漏洞。这个秋天怀尔斯一直想把这个漏洞补上，但到了12月，当这个问题已通过电子邮件的谣言工厂到处散发时，怀尔斯公开承认他的证明还有问题——对于已被称为20世纪最伟大的数学家的怀尔斯来说，这确实让人有些难堪，但这一次怀尔斯不是孤军奋战了。他

---

* 相传阿基米德发现浮力定律时，欣喜若狂，高呼“尤里卡”（Eureka，意为“我发现了”）。——译者

请剑桥大学的一位同事理查德·泰勒(Richard Taylor)相助,终于在1994年9月,即原证明公布14个月后将漏洞补上了。这时费马大定理才被正式认定得到证明了。

1997年6月怀尔斯来到格丁根这座高斯曾任教的大学去接受沃尔夫斯凯尔奖。如果马克没有在20世纪20年代的恶性通货膨胀中大幅贬值的话,那么该奖项应相当于当年的200万美元。不过无论如何怀尔斯还是得到了5万美元——以及那种屠龙的满足感。"这个问题解决了,确实有一种获得自由的感觉。"他说,"它缠住我达整整8年之久,从早上一觉醒来直到晚上入睡我的脑子里无时无刻不在思考这个问题。现在长途跋涉走到尽头了,我的脑子总算清静下来。"[26]

41岁的怀尔斯解决了费马的难题,对于只有年轻人才能作出杰出的数学贡献这一规则来说,这无疑是一个令人鼓舞的例外。"如果我的所作所为有助于改变这一观念,"怀尔斯说道,"我将感到十分荣幸。"[27]可埃尔德什对怀尔斯的有关年龄之谈却不以为然。"要是认为他是老年人的话,"埃尔德什说,"那我又是什么呢?灭绝啦?"对于怀尔斯的屠龙之举,埃尔德什心服口服,但他并不冒充自己懂得他的证明过程。令他倍感高兴的是,怀尔斯在攻克这一难题的8年当中,从来没有用过一台计算机。

怀尔斯的证明将整个20世纪数学领域里的复杂技术都派上了用场,显然不可能就是费马所谓"页边所限,容纳不下"的那个证明。问题在于费马是否真的证明了这个问题,抑或他只是用他的旁注跟后人开了一个天大的玩笑?要不就是他自信已证明这个问题,却并不知道证明过程还有问题?"费马的判断有时确有问题,"埃尔德什说道。举例来说,1640年费马认为自己有一个表达式 2^n+1,当 n 本身是2的指数形式

时，该表达式的结果一定是一个素数。因此，当 $n=2$ 时，$2^2+1=5$是素数；当 $n=2^2$ 即 4 时，$2^4+1=17$ 也是素数；当 $n=2^3$即 8 时，2^8+1 给出了另外一个素数 257；当 $n=2^4$ 即 16 时，$2^{16}+1$ 仍是一个素数 65 537。"一个世纪之后，"埃尔德什说，"欧拉才找到一个反例。"1732 年欧拉表明，当 $n=2^5$ 即 32 时，2^n+1 表示的就不是一个素数。"结果表明，$2^{32}+1$ 等于 641 与 6 700 417 的乘积。"埃尔德什说，"所以当费马认为自己证明了那个定理时，他是搞错了。有机会我一定问问他。等我去了那个无需返程护照的地方——因为根本就没有回来的路——我会问问他的。"

可是欧拉同样也会犯错误。他注意到，虽然费马否定了一个数的立方可能等于另两个数的立方和，但一个数的立方肯定可能等于三个数的立方和，如：

$$3^3+4^3+5^3=6^3$$

于是欧拉将费马大定理作了一个推广，声称 3 个数的 4 次方之和不可能等于另一个数的 4 次方；4 个数的 5 次方之和不可能等于另一个数的 5 次方；一般地，$n-1$ 个数的 n 次方之和不可能等于另一个数的 n 次方，但 n 个数的 n 次方之和总能表示为另一个数的 n 次方。

欧拉的判断错了，但一直没人知道。直到 1966 年，莱昂·J·兰德（Leon J. Lander）和托马斯·R·帕金（Thomas R. Parkin）才给出一个 5 次方的反例：

$$27^5+84^5+110^5+133^5=144^5$$

1988 年，哈佛大学的诺姆·埃尔克斯（Noam Elkies）又给出一个 4 次方的反例：

$$2\,682\,440^4+15\,365\,639^4+18\,796\,760^4=20\,615\,673^4$$

不久，另一位数学家发现了可能存在的最小的 4 次方反例：

$$95\,800^4+217\,519^4+414\,560^4=422\,481^4$$

■

尽管欧拉也会出错,但他仍是18世纪最伟大的数论家。在埃尔德什眼里,欧拉更值得称颂的是他毕生从事数学研究至死方休。1783年9月18日,在计算了不久前发现的天王星的轨道后,他稍事休息,跟孙子玩了玩,并呷了一口茶。他手里拿着烟斗,突然呛了致命的一口,冒出了最后几个字:"我死了。"

"有一次在讲座时我讲了这个故事。"埃尔德什说道,"当即某位反应敏捷的听众叫了起来:'欧拉的又一个猜想得到证明了!'我想跟欧拉这样走了。我希望在我演讲时,在黑板上完成一个重要的证明之后,有人喊道:'一般情况怎样?'我会面对听众,微笑着说:'我把它留给下一代',然后就撒手而去了。"

原书空白页

第 5 章

“整数是上帝创造的”

三一学院的一位研究生
去计算无穷的平方
但写下那些数字
直让他烦得慌，
于是他改学神学，把数学全丢光。

——佚名

费马大定理的故事确实扣人心弦，但到底是什么使得该定理本身具有重大的数学意义呢？抑或我们要问，它从数学上讲确实是如此重要吗？比如说大数学家高斯就不以为然，虽然他也曾经鼓励过索菲·杰曼去解决这个问题。1816 年，一位当天文学家的同事告诉囊中羞涩的高斯说法国科学院为这个定理的证明悬赏了 3 000 法郎，信的结尾写道：“依我看来，亲爱的高斯，你应该为此努力。”可高斯并不赞同，他回信说：“非常感谢您能告诉我有关巴黎提供的奖金一事。但我不得不说费马大定理作为一个孤立的猜想对我没有什么吸引力，因为我本人就能轻而易举地给出一大堆这种无人能够证明或驳倒的猜想。”搁下高斯的傲慢暂且不说，他的反应确实提出了这样一个问题，即究竟怎样才算是一个有意义的数学定理呢？

当斯坦尼斯拉夫·乌拉姆在高等研究院举行的计算机问世 25 周年的纪念会上发表演讲时，他默算了一下每年在数学

杂志上出现的定理有多少条,结果得出了100 000这个数目。“听众一下子目瞪口呆,”乌拉姆回忆说,“第二天两位听过我讲座的年轻数学家找到我说,我估算的庞大数字给他们留下了深刻的印象,于是他们在研究院的图书馆里进行了更为系统详实的研究。他们通过将杂志的品种数乘以每年的期数,再乘以每期的论文数以及每篇论文中平均出现的定理条数,得出每年的定理数在20万条左右。显然这么庞大的定理数目真够我们去思考的……如果定理的数目超出我们的研究能力,那么谁又能相信何者更‘重要’呢?”[1]

“现在每年发表的定理在25万条以上,”格雷厄姆说道,“按照我们对‘证明’的看法,数学家们就比其他的科学家们需要更多精力。但是谁来看这些定理?现在权威的证明还是具有特别的影响力——如果你信得过证明人或者是检查证明的人,你就相信这个证明过程。即使埃尔德什也会说,‘我相信如此这般,因为某某人说是这样的’。埃尔德什相信四色定理是真的,因为他信赖的某个人检查了证明过程。数学的某些领域是那样的晦涩或新颖,以致工作于这些领域的人都找不到同道来讨论或欣赏他们的成果。我听有人说,如果从事某个数学领域研究的人数不足100人,那么这个领域就不重要。但问题是每个领域都得有个起点。”在娱乐数学和严肃的数论之间,界限经常是模糊不清的。现在再没有人研究鲁思—阿伦数对了,因而看起来这个问题一定属于娱乐数学的范畴了。鲁思—阿伦数对尽管有过有趣的历史,但它们并没有导致产生新的重要概念,也没有揭示老概念之间新的内在联系。

数学文献中对**史密斯数**的引用稍多于鲁思—阿伦数对。史密斯数的起源是一个电话号码。1982年利哈伊大学的艾伯特·韦兰斯基(Albert Wilansky)注意到(天晓得他是怎么注意到的)他姐夫H.史密斯(H. Smith)的电话号码有一个奇特

的性质，即它的各位数字之和等于它的素因子的各位数字之和。史密斯的电话号码是493－7775，分解为素因子为：4 937 775＝3×5×5×65 837。[2] 原号码的各位数字之和(4＋9＋3＋7＋7＋7＋5)为42，等于它的各素因子的各位数字之和(3＋5＋5＋6＋5＋8＋3＋7)。虽然韦兰斯基的洞察力没法跟埃尔德什证明切比雪夫定理相比，但史密斯数确实写进了《二年制学院数学杂志》。韦兰斯基还列举了其他一些史密斯数，但他注意到他知道的这些数都比他姐夫的电话号码小。例如，9 985是一个史密斯数，因为9 985＝5×1997，而9＋9＋8＋5＝5＋1＋9＋9＋7。同样，6 036也是一个史密斯数，因为6 036＝2×2×3×503而6＋0＋3＋6＝2＋2＋3＋5＋0＋3。已知最小的史密斯数为4，因为它等于它的素因子2和2的各位数字之和。

大多数数学家都会认为史密斯数的出现虽然比较有趣，但从数学上讲却是一条死胡同，是与其他概念不沾边的雕虫小技。但就在史密斯数出现一年以后，波多黎各大学的沙姆·奥尔蒂卡(Sham Oltikar)和基思·韦兰(Keith Wayland)两人证明了3条定理，将史密斯数和其他更为熟知的概念联系了起来，使得史密斯数的概念显得并不那么傻了。他们两人发现可以通过"各位数字均为1"的素重复单位数，即形如11和1 111 111 111 111 111 111这样的素数，来轻而易举地得到史密斯数，即将任何大于11的素重复单位数乘以3 304即构成一个史密斯数。更为重要的是，他们还证明了由1和0组成的任何素数均有一个倍数是史密斯数。奥尔蒂卡和韦兰两人想知道史密斯数是否是无穷无尽的，但当时还没有人知道。他们注意到，"只要能够证明通过数字1和0可以构造出无限多个素数(而这本身就是一个具有挑战性的有意义的问题)，就可以得出一个肯定的答案。"[3] 事隔不久，韦恩·麦克唐纳(Wayne McDonald)就证明了史密斯数是无穷无尽的，但此证

明过程并未给出构造每个可能的史密斯数的"菜谱"。尽管如此，数学家们跟踪史密斯数，总算不是完全的自讨苦吃。但从事这一领域的人无论如何也没有 100 个，根本就达不到格雷厄姆那位同事的要求。

■

灵感和联系——这才是数学家们孜孜以求的。高斯就是这样一位善于发现人们意料之外的联系的大师。高斯于 1777 年出生在德国的不伦瑞克，父亲是一位石匠工头。就像埃尔德什一样，高斯也是一位数学神童，到老了他还对自己少年时的非凡故事津津乐道。比如说当他 3 岁时就有一次发现父亲的账簿上有错，从而及时阻止了他给手下干活的人多发了钱；还比如说他在学会识字之前就能数数等等。

事实确是如此。10 岁时高斯就成了圣·凯瑟琳小学算术班里的骄傲。那所小学是"中世纪的肮脏见证……由一个叫比特纳(Büttner)的野蛮男子管着。他教育这上百个男孩的方法就是鞭打，使他们变得如此的惊恐和愚笨以至连自己的名字都给忘了。"[4] 有一天，当比特纳手里拿着藤杖在教室里走来走去时，他要求那些男孩计算从 1 到 100 的各数之和。第一个解答问题的将把石板放在比特纳的桌上，第二个解答的将把石板放在第一块石板之上，如此等等。比特纳想这个问题还不把孩子们忙上一阵。可是，没过几秒钟，高斯就跑上来把自己的石板扔在比特纳的桌上，然后回到了座位。在其后的 1 个小时内，当同学们都在忙于各自的计算时，高斯静静地坐在那儿，只有比特纳在蔑视地瞪着他。等到比特纳查看石板时，看到的却是一个接着一个的错误答案，以至连藤杖都打得发了热。最后该轮到高斯的石板了，只见上面就写了一个

数:5 050,而没有具体的计算过程。比特纳十分诧异,问高斯他是怎么做的。“当高斯向他解释后,”埃尔德什说道,“那位老师意识到自己一生中最重要的时刻到来了。从那以后就跟高斯一直密切配合,”并给了他与众不同的教科书。对此,“高斯感激不尽,终生不忘。”

高斯耍了什么花招?显然他在自己脑子中将计算顺序写了两遍,一遍在上,一遍在下,一遍正序,一遍反序:

$$1+2+3+4+\cdots+97+98+99+100$$

$$100+99+98+97+\cdots+4+3+2+1$$

高斯注意到这些数字可以竖直相加而不是水平相加。总共有 100 个竖直数对,每一对数的和均为 101。于是,答案就是 100 乘以 101 再除以 2,因为每个数都加了两遍。这样,高斯就轻而易举地将结果默算了出来。

“高斯计算方法的特别之处还在于,”格雷厄姆说道,“它不仅对这个具体的例子有效,而且还可以推广到计算前 50 个整数之和、前 1 000 个整数之和、前 10 000 个整数之和或者是前任意多个整数之和。高斯找到了计算从 1 到 n 的各整数之和的一个绝妙方法,即结果等于 n 乘以 $n+1$ 然后再除以 2。计算这类数列之和的这种方法确实是从‘天书’中来的。”

数学就是发现联系,寻找特殊问题和一般结果之间、一个概念和另一个貌似无关但实际上相互联系的概念之间的关系。任何有意义的数学概念都不是孤立的。斐波那契数列不是;大家熟知的常数 π 不是;素数不是;即使像怀尔斯对费马大定理的如此深奥的证明也揭示了代数的丢番图方程和几何的椭圆曲线之间存在的深层联系。

斐波那契级数 1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233……源于快速繁殖的兔子问题,但很快在自然现象和人工设计上一再出现。例如向日葵的种子总是沿着相互交织的两组螺旋

线布置，一组旋向为顺时针，另一组为逆时针。两个方向的螺旋数目是不一样的，事实上他们总是构成连续的斐波那契数列。因此，如果顺时针方向的螺旋数为144的话，那么逆时针方向的螺旋数必然是89或233。在人工设计上也经常用到斐波那契数列，因为当斐波那契数趋向无限大时两个连续项之比的极限为"黄金比"——后者是古希腊人在绘画和古典建筑（如帕台农神庙）上喜欢采用的理想矩形的边长比值。事实上，斐波那契数列与其他事物的联系是如此密切，以至于专门有一本杂志《斐波那契季刊》去研究它。

众所周知，以3.141…开头的无限非循环小数 π 源于对圆的研究。古希腊人注意到无论多大的圆其周长和直径的比值总是一个常数 π。但是 π 也出现在与圆毫不相干的其他许多场合。比如欧拉就发现整数平方的倒数和与 π 有关：

$$\pi^2/6 = 1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 + 1/5^2 + \cdots$$

1777年孔泰·德·比丰（Comte de Buffon）为计算一根针掉到一组平行线上时与其中一条线交叠的概率而得到一个含有 π 的公式。（比丰是一位数学的先驱，他曾估计出地球的年龄不是《圣经》上所说的6000年而是75000年，并因此使他的同时代人大为震惊。）

高斯用素数定理将素数的分布与对数以及著名的常数 e 联系了起来。为了方便那些在中学代数课上打瞌睡或者根本就没有上过中学的人，这里介绍一下对数的概念。一个数的对数就是为了得到这个数而令一固定数（称为底）必须达到的幂。因此，100的以10为底（记为 $\log_{10}$）的对数 $\log_{10}100$ 为2，因为 $10^2 = 100$。类似地，$\log_{10}1000 = 3$，因为 $10^3 = 1000$。请注意对数的缓慢增长速度，从100到1000，其以10为底的对数才从2到3增加了1。

美国加利福尼亚州的人应该知道，地震的里氏级数是以

对数来表示的，即里氏震级增加1（如从2到3）相应于地震强度增加10倍，而当里氏震级由2变为4时，其地震强度则增加100倍。对数增长（因为对数的增长总是这么缓慢，用“增长”这个词似乎都不太妥贴了）与指数增长相反。当然，对数的底数还可以是其他数值，例如1 000的以2为底的对数是大于9但又比10稍小一点的某个数值，因为$2^9=512, 2^{10}=1024$。所谓的自然对数就是为得到某个数而令e必须达到的幂（缩写为$\log_e$）。

e又是什么呢？就像π一样，e也是一个无限非循环小数。欧拉将e的值计算到了小数点后第23位：

$$2.718\ 281\ 828\ 459\ 045\ 235\ 360\ 28\cdots$$

该数可由下列无穷级数产生：

$$e=1+1/1+1/(1\times2)+1/(1\times2\times3)+1/(1\times2\times3\times4)+1/(1\times2\times3\times4\times5)+\cdots$$

表面上看来，e这个数并不怎么“自然”，其所以有这种叫法，是因为它在诸如生长和衰亡这些基本过程的数学模型中经常出现，更不用说另一件大多数人（埃尔德什除外）都朝思暮想的东西——金钱了。例如，e是计算银行复利的关键常数。假设你在银行存了1元钱，银行年息为100%且按年计息的话，那么你在年尾就可以拿到双倍的钱。另外一个银行如果也是年息100%，但按半年计息，那你就更合算了，因为半年后你可以得到5角的利息。息上加息，1年后你就有2.25元了。如果年息还是100%，但按季度计息，情况又怎么样呢？这时候，年尾你就有2.44元了。如果年息仍是100%，但每年计息8次，1年后将总共变为2.57元。但是，这时大方得有点过分的埃尔德什银行站了出来，提出年息100%而且连续计息，那么1年后你会不会像埃尔德什所说的那样变得“无限富有”呢？情况并不是这样。事实上在年尾你将得到e元，

也就是 2.718…元。

高斯对素数分布问题的洞察力在于他发现随着数值越来越大和素数越来越稀，其分布密度与其自然对数成反比。高斯于 18 世纪 90 年代后期提出的素数定理后来于 1949 年被埃尔德什和西尔伯格用初等方法证明了。根据这一定理，在某一整数 n 附近两个连续素数之差的平均值近似等于 n 的自然对数，且 n 越大，它们就越接近。当 $n = 100$ 时，n 的自然对数为 4.6，因此根据素数定理，在 100 附近，平均每 4.6 个数中间就有一个素数。这个预言的准确性如何呢？事实上，在从 75 到 125 之间的 50 个数中有 9 个是素数(79,83,89,97,101,103,107,109 和 113)，也即平均每 5.5 个数中有一个素数——与素数定理相差不算很大。当 n 趋向于无限大时，对于任意 n 值，素数的实际密度和素数定理预言的密度相等。为什么作为数字基石的素数会跟这个生长和衰亡的常数 e 如此紧密地联系在一起呢？这个问题就只有上帝本人才能回答了。

如果数学的成功是用揭示貌似无关的概念之间的深层联系来衡量的话，那么欧拉应该拿头奖。欧拉注意到 e 的 πi 次方加上 1 等于 0，这样，他大笔一挥就将 π，e，i(虚数，-1 的平方根)和最基本的数字 0 和 1 联系在一起，这恐怕是数学中最精炼和最著名的公式了。请注意欧拉公式 $e^{\pi i} + 1 = 0$ 在表现形式上是多么的美，多么的简洁，它不仅充满了数学的美感，而且还富有神秘的魅力。

在美丽而简洁的欧拉公式背后是一段遥远的历史，因为数学家们对 π，i 和 e 这些数的理解和接受来得并不轻松，甚至接受像 0、负数和 2 的平方根这类无限非循环小数的概念也不是轻而易举的。埃尔德什 4 岁就“发现”了负数确实显得有些早熟，要知道欧洲文明直到 17 世纪才算彻底接受了负数的概念。在欧几里得时代，数学家们只习惯于像 1,2,3 这样

的正整数。当然,分数也可以,但条件是它们要能够表示为单分数(在我们现在看来,这未免有点累赘)。古希腊人也没有0和负数的概念。亚里士多德甚至偏激到怀疑1是不是数的地步,原因是数字量度的是多重性,而1只代表一个单位。可是,古希腊人做减法并不费事。可以想象,那些古代的放牧人能够数清他们的牲畜数目,而且也会从6头牛中减去3头牛,但他们并不把-3头牛当回事。

正如马丁·加德纳所说的那样,"1头牛减去1头牛后什么也没了,但如果-1头牛加上+1头牛后两者就像一个粒子遇到了它的反粒子一样无影无踪了。一个古老的笑话说某人的性格是那样的内向,以致当他走进聚会的人群中时,人们会左右看看,然后问道'谁走了?'"[5] 上面的加法听起来就像这个故事一样滑稽可笑。直到1660年,概率论之父布莱斯·帕斯卡(Blaise Pascal)还认为把任何比0小的东西称作数是无稽之谈。古希腊和文艺复兴时期欧洲的数学家们肯定知道如何用负数来解方程,但他们认为这些量只是'虚构的'东西。资本主义的兴起促使了这些'虚构'的东西走向现实,收支账簿和损益表上的红色数字为17世纪西方文明最终接受负数铺平了道路。

在整个黑暗时期,对单分数的奇异偏爱和对罗马数字的因袭阻碍了西方数学的进展。虽然有些西方数学家知道有更好的方法,但他们的呼喊被淹没在一片黑暗之中。尽管斐波那契也玩弄单分数,但他却是看见曙光的人之一。斐波那契于12世纪末生于意大利比萨城邦,父亲是一个富庶的商人和社区领袖。在比萨,他学习了拉丁文和欧几里得及其他希腊数学家们的著作。当他还是小学生的时候就迁到了北非的穆斯林城市布吉亚,在那里,他父亲当了海关官员,负责检查运回比萨的皮革。年轻的莱昂那多受到了阿拉伯文化的教育。

他沿地中海到处旅行,到过君士坦丁堡、埃及和叙利亚。他认识到阿拉伯数字,也即我们今天使用的数字,比他从小在西方熟悉使用的罗马数字更加优越。

对于加减法来说,罗马数字也一样好使。例如,10+3用罗马数字表达也比较容易:

$$\begin{array}{r} \text{X} \\ +\ \text{III} \\ \hline \text{XIII} \end{array}$$

就像使用阿拉伯数字一样:

$$\begin{array}{r} 10 \\ +\ 3 \\ \hline 13 \end{array}$$

将罗马数字相加时,你只要将符号组合在一起就行了,最多也只需将一串低数值符号用一个高数值符号代替而已。例如在3+4时用一个"V"代替5个"I"一样:

$$\begin{array}{r} \text{I I I} \\ +\ \text{I I I I} \\ \hline \text{I I I I I I I} \end{array} = \text{VII}$$

可做起乘法来就麻烦了,因为罗马数字缺乏"位数"的概念。而"位数"概念是我们计数系统的第二要素。当我们写23这个数时,2和3所占的位置至关重要。我们说"二十三"是因为2位于十位上而3位于个位上。这就使得乘法易于进行,如23×4:

$$\begin{array}{r} 4 \\ \times\ 23 \\ \hline 92 \end{array}$$

让我们想一想这个过程究竟是怎样进行的。3乘以4得12,而12就是1个"10"加上2,于是我们就把2写在个位而把1进到十位上,并在脑子里记住这个进位。然后我们再将十

位的 2 乘以个位的 4,得出十位的 8。将 8 加上刚才进位的 1 便得出十位上的 9。就是这样。

如果试图用罗马数字进行这个过程,我们能从哪儿下手呢?

$$\begin{array}{r} \text{IV} \\ \times\ \text{XXIII} \\ \hline \end{array}$$

答案是也许从来就没有人试过。在 13 世纪的比萨,乘法是在算盘上进行的,实际上算盘上不同列的珠子代表的就是位数概念。使用算盘进行计算也不错,只是没有计算步骤的记录,因而也无法保存你的工作。

公元 6 世纪印度的数学家们发明了使用位数的计数系统,并引入"0"的概念以使这些计数符号维持在自己的位上。因此,"1"后面带个"0",即 10,就和单独的一个"1"截然不同。经常以年老弱智自嘲的埃尔德什说,印度人确实聪明,他们不仅发现了"0",而且还用发音相似的印度词语来称呼弱智者(buddhū)和老人(buddha)。

公元 7 世纪,印度学者将他们的计数系统传给了伊斯兰人,从此"0"和位数的概念很快传遍了阿拉伯世界。阿拉伯数字易学易用给了斐波那契深刻的印象,以至于他都想让比萨的商人们也知道这些数字。1202 年,他写了一本名为"算盘经"(Liberabaci)的书。实际上,这本书除了题目以外很少涉及算盘,其主要内容是从罗马数字的枷锁下把计算解放出来。从 12 世纪的数学水平来看,这本书似乎有点蹊跷,因为它对于我们认为是皮毛的那些东西都作了解释。书的开头是这样写的:"这九个阿拉伯数字是 9,8,7,6,5,4,3,2,1。有了这九个数字,还有符号'0',任何数就都可以写出来了。"[6]

令斐波那契颇为懊恼的是,他的《算盘经》并没有得到比

萨商业阶层的注意。这些养尊处优的商人懒得去接受“0”而放弃使用罗马数字。然而，斐波那契的数学家同行对此的反应却好多了。随着时间的推移，它逐渐成为促使西方转向使用阿拉伯数字的最有影响的一本书。到 15 世纪，这些数字已经出现在钱币和墓碑上了。17 世纪，西方数学已完全从黑暗时期停滞不前的状况中挣脱出来并开始走向繁荣，这在很大程度上还得归功于“0”、阿拉伯数字和负数。

17 世纪，西方数学家们也与埃尔德什喜欢的“无限”概念进行了一场激战，结果从此以后“无限”的概念就栽入了神秘主义的深渊。人们对它基本上是敬而远之：因为上帝的威力是“无限”的，要是有人试图只用一个符号就代替了上帝的威力，那将是悲哀的事情，万一上帝不喜欢这个符号呢？

牛顿和莱布尼兹就敢踏上这块神圣的领土。他们两人各自独立地发明了微积分，从而把“无限”的概念引入主流数学之中。大至行星的运动，小至炉内热量的流动，对于量度瞬时的变化和变化率，微积分都是一种强有力的工具。在微积分中，既有无穷小，又有无穷大。通过将曲线下的区域分成越来越小(称为“无穷小”)的组成部分，然后对它们的面积求和的方法求得曲线下区域的面积的过程称为积分，在积分中就用到了无穷小。而无穷大则出现在作为微积分基本概念的“极限”中。考虑下面的所谓几何级数，即 $1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32 + \cdots + 1/2^n + \cdots$，其中每一项的分母都是前一项的分母的 2 倍。无论你将该级数延伸到多少有限的项数，你总不能得到 1，尽管你可以尽量靠近 1。但就极限而言，当该级数的项数趋于无穷大时，它就等于 1。

现在看这个由正整数的倒数之和构成的所谓调和级数：

$$1/1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 + \cdots + 1/n + \cdots$$

当 n 趋向于无穷大时,该调和级数的极限等于多少呢?看起来调和级数和几何级数之间并没有多大的区别。几何级数收敛于1,但调和级数却并不收敛。尽管调和级数的连续项越来越小,但该级数的和却可以大于我们设定的任何数。只是由于该级数增长得这么缓慢,因此所需的项数可能比较多而已。例如,要它的和大于5,就得有83项;要大于20,就得有大约3亿项;要大于100,就得有大约10^{43}项!

此外还有一些貌似简单却行为"怪异"的数列,请看:

$$1-1+1-1+1-1+1-1+\cdots$$

该数列之和等于多少?如果这样组合:

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots$$

显然结果为0。但如果换一种方式的话:

$$1+(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)+\cdots$$

显然结果又等于1。

0肯定不等于1,这就怪了。"很多人认为重新组合这些项并没有什么不合法的地方,"格雷厄姆说,"毕竟这只是加法运算,但这个0=1的结果说明一牵涉到无穷级数就有些让人难以捉摸。相当一段时期人们都弄懵了。"19世纪挪威数学天才尼尔斯·亨里克·阿贝尔就被这些级数弄得发了疯。这位年仅27岁就夭折了的数学家,在他去世的前一年曾这样宣称:"发散级数出自魔鬼之手,在这些数列的基础上作任何结论都是蛊惑人心的。通过这些级数,人们可以随心所欲地作出任何结论,也正因为如此,它们才是这么多谬误和矛盾的根源……"[7]

就是在数学家们成功地驯服了无穷级数之后,"无穷"这一概念本身仍蕴藏着出人意料之处,例如,人们在19世纪末就证明了"无穷"不是单个概念而是有着不同的无穷。1845年生于圣彼得堡的德国数学家乔治·费迪南德·路德维格·菲利普·康托尔(Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor)表明,就像

整数一样,“无穷”也有大小之别。他的这一结果让人颇为震惊。早在康托尔之前两个半世纪,伟大的意大利科学家伽利略就在他的《关于两种新科学的对话》一书中提醒人们注意正整数(1,2,3…)和它们的平方之间的一一对应关系,尽管从直觉上来说,平方数似乎比正整数的数目少得多:

1	2	3	4	5	6	7	…
↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	
1	4	9	16	25	36	49	…

面对这一让人莫名其妙的对应关系，伽利略不知道他能得出什么结论，可是康托尔知道。他认为应该不折不扣地看待这种一一对应关系，并宣称平方数和正整数是一样多的。基于同样的道理，康托尔还说，偶数和正整数也是一样多的:

1	2	3	4	5	6	7	…
↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	
2	4	6	8	10	12	14	…

而且素数也是一样多的:

1	2	3	4	5	6	7	…
↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	
2	3	5	7	11	13	17	…

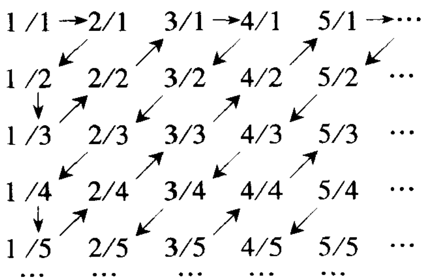
康托尔总结说,所有这些无穷集合,包括平方、偶数、素数等,都具有同等的大小。他把这些集合的大小称为$\aleph_0$(读作阿利夫零),此处$\aleph$是希伯来文的第一个字母。大小为$\aleph_0$的集合称为可数的或可数无穷的,因为它的元素与正整数之间可以形成一一对应关系。康托尔接着又问,由有理数(即形如 a/b 的所有分数)构成的无穷数集的大小是不是也是$\aleph_0$呢?看起来有理数似乎要多得多,例如在 0 到 1 之间的狭小区间内就

有如 1/171，16/17，19/65，1/5，5/6，1/8，231/232 等无穷多的有理数。但是在“无穷”的王国里，事情往往与表面现象不一样。康托尔巧妙地证明，有理数也是可数无穷的，即也是 $\aleph_0$ 级的。

在康托尔的证明中，他首先把有理数排成一个无穷阵列，其第一行是分母为 1 的分数按由小到大的顺序排列，第二行是分母为 2 的所有分数，第三行是所有分母为 3 的分数……等等：

1/1　2/1　3/1　4/1　5/1…
1/2　2/2　3/2　4/2　5/2…
1/3　2/3　3/3　4/3　5/3…
1/4　2/4　3/4　4/4　5/4…
1/5　2/5　3/5　4/5　5/5…
…　…　…　…　…

这样，尽管这个无穷阵列的每一行和每一列都有无穷多个元素，康托尔还是证明了这些分数是可数的。通过他的巧妙的“对角方法”，康托尔说明沿着对角方向行进就可以在这些分数和正整数之间建立一一对应关系：先向右走一步，然后沿对角方向一直走到左下方，再往下走一步，然后又沿对角方向走到右上方，这样一直无限地进行下去（当然他知道有些分数会重复出现，如 1/1，2/2，3/3，4/4 等都是 1 的不同形式。当遇到这些重复的分数时，他建议跳过它们）。



“在每个对角方向上所有分数的分子和分母之和都相等,”格雷厄姆说道。很显然,康托尔知道通过这一对角方法他就在分数和正整数之间建立起了一一对应关系:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	…
↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	
1/1	2/1	1/2	1/3	3/1	4/1	3/2	2/3	1/4	…

对于说明有理数是无穷可数的这个证明,康托尔自己都感到意外。“我知道这是对的,”他说,“但却无法相信这一结果!”[8]

对于无穷可数数集$\aleph_0$的算术运算规则,康托尔也感到不可思议。例如:

$$\aleph_0 + 1 = \aleph_0 \text{和} \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$$

这些奇特的性质——无穷加上1还是无穷,同样,无穷加上无穷也是无穷——正是“希尔伯特饭店问题”的关键。“希尔伯特饭店问题”得名于传奇式的德国数学家戴维·希尔伯特,后者对康托尔的工作大加赞赏。他说:“没有人能够将我们从康托尔建立的天堂里赶出来。”[9] 据说希尔伯特饭店有无穷多个房间。在某个晚上,饭店的所有房间都客满了,但饭店的外面仍挂着“有房”的招牌。一位客人进来了,服务员把1号房间的客人换到2号房间,2号房间的客人换到3号,3号房间的客人换到4号……然后让新来的客人住到了1号房间。第二个晚上一下来了无穷多个客人,而老客户一个也没有离店,可服务员仍说:“没问题!”他把1号房间的客人换到2号,2号房间的客人换到4号,3号房间的客人换到6号,4号房间的客人换到8号,5号房间的客人换到10号……也即把n号房间的客人换到$2n$房间,这样他就为新来的无穷多个客人腾出了无穷多个奇数号的房间。

看来无穷数集的奇特运算法则还不够刺激,康托尔又开

始寻找比正整数集的无穷更大的无穷。他研究了实数集,也就是可以用小数来表示的所有数字的集合。康托尔指出,只要随机地列出从0到1之间的所有实数,并将它们与正整数相对应:

.12146789…	1
.32769234…	2
.71234568…	3
.43567233…	4
.645946784…	5
…	…
…	…

看起来似乎可能有足够的正整数来和所有的实数形成一一对应的关系,但事实上实数却无法和正整数一一对应。假设确有一张对应表包含了所有的实数。根据康托尔的对角方法,从上述列表中的黑体字序列.12264…构造出一个新的数,使这个数的每一位数字都和前一个数的不同。例如,可以将前面那个数的每一位数字都加上1,得出.23375…。很显然,这个新的数也是一个实数,所以也应该出现在表中的某个地方。但事实上这个实数表无法包含这个新的数字,因为根据这种构造方法,这个新数的第一位数字与第一个数的第一位数字不同,它的第二位数字和第二个数的第二位数字不同,它的第三位数字和第三个数的第三位数字不同……等等。因此这一实数表是不完全的,实际上的实数比与正整数对应的实数要多。这样,康托尔就发现了一个更大的无穷数集,他把它称为$\aleph_1$。

"我对超穷存在的真实性毫不怀疑,"他说,"为此,我得感谢上帝的帮助。""康托尔的发现恰逢其时。他的证明发表不久,教皇利奥十三世(Pope Leo XIII)就发出了影响极大的通谕,

号召天主教徒对科学教学持开明态度。教皇客观上成了他的宣传家,使得康托尔的发现广为流传。他宣称:"基督哲学从我这里第一次得到了'无穷'的真谛。"[11]康托尔说他证明了上帝的威力比我们普遍认为的还要大,他认为上帝的领地不仅仅是无穷可数,而且是比这更大的超穷。对此,尽管有些基督教思想家不以为然,认为康托尔侵入了上帝的领地,但认同他的话的也大有人在。埃尔德什曾把"天书"说成是有"超穷"多页,这也反映了对康托尔的褒奖。

尽管康托尔与上帝有"交往",但他的生活道路并不平坦。他最疼爱的儿子在离13岁生日只差4天时神秘地夭折了,康托尔本人也几进几出精神病院,精神的崩溃和沮丧袭来的时候,他会一连几天坐在那里神情呆滞、一言不发。在这种昏睡状态他实际上是在聆听上帝诵读"天书"的声音,而一旦苏醒后他就幻觉有人密谋作乱。他一度卷入试图证明莎士比亚的戏剧系弗朗西斯·培根(Francis Bacon)所作的知识闹剧之中,他还说自己破译了有关英格兰第一位国王的信息,并声称"一旦结果发表将会使英国政府惊惶失措"。[12]康托尔在德国哈雷的精神病院里依靠战时救济度过了自己一生中最后的一年光阴,在此期间他一直祈祷家人能接他回去。1918年1月6日,他因心脏病发作死在那里,享年73岁。

就像神学界的反应一样,康托尔的数学同行们对他的发现也是褒贬不一。希尔伯特对此自然是极为推崇的,伯特兰·罗素也不例外,他把康托尔有关"无穷"的发现描述为"可能是该时代所能取得的最大成就"。[13]但当时德国数学界的中坚人物利奥波德·克罗内克(Leopold Kronecker)就不承认"超穷",他用那广为引用的话来驳斥,那就是"只有整数是上帝创造的,其余都是人为之物"。[14]克罗内克是说,只有整数是真正存在的,所有其他的数都只不过是想象力过于丰富的数学家们

的臆造之物。法国著名的几何学家亨利·庞加莱(Henri Poincaré)与克罗内克遥相呼应,他说未来的数学家们回头看时将把康托尔的工作视为"已经痊愈的一个痼疾"。[15]这些严厉的批评更加剧了康托尔的病情。

在他清醒的时候,康托尔曾思考过是否存在一种大于整数集却又小于实数集的无穷数集。他相信这样的无穷数集不存在,但他却未能证明自己的这一"连续统假设"。1900年,希尔伯特在巴黎举行的第二届国际数学家大会上提出了他认为新世纪急需回答的23个数学问题,这恐怕是数学史上最著名的演讲了。这些问题的第一个就是"连续统假设"的证明。在康托尔去世很久以后,哥德尔也企图证明"连续统假设",但他的努力仍然以失败而告终。1963年,曾当过哥德尔助手的29岁的保罗·科恩(Paul Cohen)证明了以通行的数学术语无法证明"连续统假设",这一结果轰动了数学界。科恩证明,无论假设"连续统假设"是真还是伪,都不会导致与有关无穷数集的其他结果相矛盾。可惜的是科恩的数学同行们不容易读懂他的证明。

"数学家们懂得,要知道这一证明正确与否只有一个办法,"约翰·巴罗(John Barrow)在他的《天空中的 π》一书中写道,"于是,科恩便来到普林斯顿敲响了哥德尔的家门。"[16]可此时正在与妄想症斗争中苦苦挣扎的哥德尔并没有让他昔日的助手进来,他"打开一条门缝,让科恩的证明进去,而科恩本人却无法跟进。然而,两天后科恩应邀来哥德尔家喝茶。大师终于认可了科恩的证明。"至此,哥德尔在1929年提出的"不完全性定理"总算在一个实际的场合探出了自己丑陋的头来。当初哥德尔提出这一定理时,许多数学家都只是迫于无奈地接受了它,但他们仍认为只有那些过于矫饰的数学定理才有可能是不可判定的。可现在科恩证明,希尔伯特最急于

解答的问题也是不可判定的。

对于科恩的结果和他的朋友哥德尔反直觉的工作成果，埃尔德什一直未能心平气和地接受。他说："要是我能活上一千年，我还会问连续统假设证明了没有？假设你有无穷的智慧，那么能否证明连续统假设的真伪呢？大多数逻辑学家们相信证明不了。在某种意义上，连续统假设确实是不确定的。但如果无穷的智慧能够确定它，那也是可以想象的，因为有可能存在我们无法理解但更高的智慧却能理解的证明方法。我并不是断言这些方法存在，甚至也不是说我就相信它存在，但它仍有可能是存在的。"埃尔德什爱引用一个老掉牙的笑话，说的是一个努力劝说别人皈依基督教的人问道："要是你在街上碰上耶稣，你会对他说什么？"埃尔德什说他会问耶稣连续统假设是否正确。"耶稣可能有三种回答，"埃尔德什说，"他可能说'科恩和哥德尔已经把有关这一猜想的一切都教给你了'。第二种回答是'是的，确有一个答案，可惜你的头脑还不够发达，无法知道它'。耶稣还有可能给出第三种答案：'还在创世前很久圣父、圣灵和我就一直为此绞尽脑汁，但我们还没有得出结论。'也许后者是最佳答案，但大多数逻辑学家们会认同第一种答案，认为哥德尔和科恩已经把有关'连续统假设'的一切告诉了我们。"[17]

而格雷厄姆则认为即使是无穷智慧也无济于事。科恩已经证明无论假定连续统假设是真还是假都没有什么绝对意义可言，都和其他的数学知识不冲突。"在数学中我们有一整套公理可循，"格雷厄姆说道，"并且还有一整套如何应用这些公理推导新的数学定理的规则。如果在这些数学公理中加入连续统假设——即断言不存在大于正整数集但又小于实数集的无穷数集——结果就跟否定这一假设一样，不会产生什么麻烦。"

“现在让人担心的是没有人知道我们现在使用的公理系统是不是相容的。或许有朝一日某人会证明某一结论，但同时又能证明这一结论并不成立。这确实是令人担忧的一件事。如果我们依赖的公理系统本身就是自相矛盾的话，那我们的数学研究会不会变成一种毫无意义的疯狂游戏呢？如果在某个体系中你既能证明 X 是真的，又能证明 X 是假的，那么你想证明什么就能证明什么。这样的话，我们究竟在干些什么呢？”

“罗伯特·曼可夫(Robert Mankoff)曾经画过一张漫画，一位若有所思、看起来像是数学家的人——只是穿着好了一点——正在一家餐馆跟服务员讨论账单。‘计算似乎没问题，’他说，‘可我总被这样一个念头缠绕着：作为算术基础的基本公理本身会不会有问题，从而使得计算的结果无效呢？’不过我认为，要是数学本身有问题的话，这些问题也该露面了。这倒是令人欣慰的，因为迄今还没有什么问题出现，因此也许数学真的没有什么问题。然而，问题在于，在这个难倒弗雷格和罗素的不祥悖论出现之前，集合论毕竟也曾无忧无虑地度过了这么长的时间。”

闲聊归闲聊，埃尔德什还是很快就接受了康托尔发现的“超穷”。他一直致力于将有限的组合数学问题扩展到无穷、甚至更广的领域，并对“不可达基数”(远大于实数集的无穷集)理论作出了重要贡献。

康托尔一个漂亮的工作成果就是证明了无理数(无限非循环小数)是客观存在的。虽然像 π 和 e 这些数在数学中已无所不在，但在19世纪以前还没有人证明它们确实是无理数。就所有数学家的知识而言，如果将 π 和 e 小数点后的数字再往后计算几位的话，数字突然截止或者开始循环也并非不可能。直到1873年，也就是康托尔证明“超穷”存在的同一

年，查尔斯·埃尔米特(Charles Hermite)才得以证明 e 是无理数。埃尔米特也因此而精疲力竭。他跟他的同事说："我再也不会冒险去证明 π 是无理数了。要是有人能够成功地证明 π 是无理数的话，我将是再高兴不过了。可是——朋友，请相信我——不费点力气可是不行的。"[18]

1874 年康托尔证明无理数的集合大得不可能是可数的。康托尔并没有具体指出哪些数是无理数，但他的工作表明貌似稀少的无理数一点也不稀少。事实上，它们比我们熟知的整数还要无穷地多。他的证明并不能帮助我们在这么多的无理数中构造出一个无理数。而事实上也很难构造，尽管康托尔证明无理数比整数还要多。又过了 8 年，慕尼黑大学的费迪南德·林德曼(Ferdinand Lindemann)终于证明 π 确是无理数。那是 1882 年，也就是阿基米德将 π 的值粗略估算到小数点后第二位之后的 2 100 多年。今天，我们已经知道 π 小数点后的 500 亿位数字。而在工程计算中，我们只需知道它后面的 39 位就能够"计算出我们已知的宇宙的周长，误差不超过一个氢原子的半径"。

对于传统的数学家来说，证明某物存在却不能详细列举出来是让人心烦的。然而，随着时间的推移，这种"存在证明"的方法最终被人们彻底接受了。实际上，人们早就应该承认这一方法，因为即使在非数学的日常生活中，它也不会造成什么麻烦：比如说要是我经营了一家拥有 50 000 个坐位的体育场，经统计有 49 999 个观众进来参加一场露天音乐会，那么我就可以肯定存在一个空坐位，尽管我不知道究竟这个空坐位在哪里。

埃尔德什对数学最大的贡献之一就是发现了一种有效的"存在证明"的新形式，称为概率方法。他是在 1947 年解答一个拉姆齐问题时提出这一方法的。假设有一群人参加集会，

事实上埃尔德什是靠掷硬币的方法判断某一对与会者是相互认识还是彼此陌生的，这样做的结果是"熟识对"和"陌生对"的分布是随机的。然后埃尔德什证明了如果与会人数不是太多的话，避免某一特定组合的概率会变得很大。"如果与会人数太多的话，"格雷厄姆说，"你就无法避免结构——这就是拉姆齐原理。埃尔德什用他的概率方法证明在与会人数较多的情况下仍可以避免某种结构，尽管他的方法无法告诉你怎样避免这种结构，就像使用某些方法可以证明一个数是合数但又不能给出他的素因子一样。你知道这些因子是存在的，但一点也不知道它们是什么。使用概率方法也是一样：按照这种方法，可以知道许多现象的存在，只是无法具体地把它们构造出来。"

对于以精确见长的数学来说，靠掷硬币来解决问题的方法似乎让人忧心忡忡，但今天在计算机科学中已经司空见惯了。有意思的是，一心躲避使用计算机的埃尔德什却对算法原理做出了重大贡献。事实证明，随机选择常常是避免计算中出现障碍的一个很好的方法。"两个在便道上相向行走的行人经常同时闪到同一边以让开对方，并且一遍又一遍地这样闪来闪去。"[19]伊瓦尔斯·彼得森(Ivars Peterson)在《随机性丛林》中写道，"他们就这样陷入了'舞蹈'的窘境，直到最后不知怎样地解开僵局为止。其实，掷硬币的方法就可以解开这样的僵局。当计算机面临相互矛盾的指令或需要选择两个或多个路径的时候也可以使用随机的方法解决。"

"随机方法对于电话的线路选择问题也很管用，"在AT&T的研究开发部门工作了35年的格雷厄姆说道，"如果某一常用线路超载的话，它就把电话业务转到另外的线路上。假设纽约和芝加哥之间的正常通话应该走1号线，并且规定如1号线忙就走2号，2号线忙就走3号……等等。事实上，

这样明确规定反而会导致'交通'堵塞。为避免这种人为的障碍,最好的办法就是根本不要什么规则,采用随机走线的方法。虽然现在情况有点不一样,但随机方法确实一度在电话公司里大显身手。"

"在星球大战计划的早期也有过同样的计算问题。所有这些导弹同时袭来,而你需要对此进行防御。那么怎样来反击呢?用哪颗导弹拦击哪颗导弹呢?正确的办法是随机射击。如果你有大量防御导弹随机攻击哪怕是数以千计的攻击导弹,那么漏掉哪颗导弹的概率是非常小的。当然,问题在于如果决策失误,就会遭受打击:你瞧,有一颗导弹漏掉了,华盛顿浓烟滚滚!你可以证明随机防御方法是非常有效的,但仅此还不具有足够的说服力。国防问题光靠逻辑不行。你能够证明什么、不能证明什么都无关紧要。"

1989年,为纪念埃尔德什概率证明方法的发现,参加在波兰波兹南召开的随机图论会议的数学家们举行了一次随机比赛。当他们绕着跑道赛跑时,谁都不知道怎样调节自己的节奏,因为谁也不知道终点在哪里。赛跑开始前,埃尔德什作为这一仪式的嘉宾掷了一个巨大的骰子以决定起始的圈数,当数学家们接近终点线时,埃尔德什又掷了一次骰子以决定再增加的圈数。埃尔德什开心地笑了,显然对自己扮演的"烦人的SF"角色相当满意。

第 6 章

得了一只羊

我唯一的建议是，如果我给你5 000美元让你不要开门的话，那你就拿了这钱回家去吧。

——蒙迪·霍尔(Monty Hall)

尽管数字是埃尔德什的亲密朋友，他偶尔也会判断失误。他的直觉不错，但也不总是很准确的。的确，上次他去拜访瓦兹索尼(当时瓦兹索尼退休在家，住在加利福尼亚葡萄酒之乡)时，就陷入了玛里琳·沃斯·萨万特(Marilyn vos Savant)在《检阅》杂志的栏目"请问玛里琳"中的一道动脑筋难题。萨万特宣称自己是记录在案的具有最高智商的人。根据《吉尼斯世界纪录大全》记载，她的智商高达228。她炫耀地戴着一枚用于"雅维克人工心脏"的特殊材料做的婚戒，这种材料是她的丈夫罗伯特·雅维克(Robert Jarvik)发明的。她在数学界的名望并未因她的《世界上最著名的数学问题》(1993)一书而有所提高。在这本书里，她对费马大定理的怀尔斯证明和爱因斯坦的相对论提出质疑。人们把"请问玛里琳"描绘成一种启迪大脑的"来自埃洛伊兹的启示"栏目，里面有许多地方涉及数学。一些人不喜欢她是因为忌妒她：她在《检阅》杂志里办的这个栏目每星期天都有成百上千万的人阅读，同时她的书和演讲也为她挣了许多钱。相比之下，许多职业数学家却从未从自己的书里挣到1分钱。

沃斯·萨万特在1990年9月9日的栏目里回答了她的一

位读者提出的一道著名的动脑筋难题。你正在参加一个电视游戏表演节目,有三扇门任你选择。其中的一扇门后面有一辆小汽车,另外两扇门后面都是一只羊。比方说你选择1号门,而知道哪扇门后面有汽车的主持人打开另一扇门,这扇门后是一只羊。他现在给你一个选择:是坚持开1号门还是开另一扇门?你怎么选?

这就是嘉宾们在蒙迪·霍尔的经典电视游戏节目"决断"中遇到的所谓蒙迪·霍尔难题,只不过安慰奖不是羊罢了。沃斯·萨万特建议写信人开另一扇门。她说坚持第一次的选择只有1/3的赢的机会,但是换一下机会就增加了一倍,变成2/3了。为了说服读者,她请他们想像一下有100万扇门。她说,"你选择1号门,而主持人知道门后有什么,他总是避开有奖的那扇门,除了比方说第777 777号门以外,把别的门都打开了。这时你会毫不犹豫地换到另外一扇门,是吧?"[1]

情况显然并非如此。她的这一栏目刚一发表,就受到持不同意见的读者来信围攻,这些读者中还包括许多数学家。他们坚持认为就是换一个选择,机会也只有1/2,而不是2/3。沃斯·萨万特在1990年12月2日的栏目里登出其中的一些来信:

> 作为一位职业数学家,我对公众缺乏数学能力的状况很担忧,请积点德吧,承认你的错误……
>
> 乔治·梅森大学罗伯特·萨克斯(Robert Sachs)博士

> 你吹牛吹破天了!让我来解释吧:在主持人打开有羊的门后,选对的机会是1比2。无论你改不改主意,机会都是同样的。这个国家的数学盲已经够多的了,我们不需要世界上智商最高的人再来帮倒忙。真不知羞!
>
> 佛罗里达大学司各特·史密斯(Scott Smith)博士[2]

这一次，沃斯·萨万特为了使她的分析深入透彻，她制了一张表，其中罗列了所有可能的结果：

1号门	2号门	3号门	结果(选择1号门且坚持不变)
汽车	羊	羊	赢
羊	汽车	羊	输
羊	羊	汽车	输

1号门	2号门	3号门	结果(选择1号门然后改变主意)
汽车	羊	羊	输
羊	汽车	羊	赢
羊	羊	汽车	赢

她说，这张表显示了“你若换一扇门，赢的机会是2/3，而输的机会是1/3；但是如果你不换门，则赢的机会只有1/3。”[3]

但是这张表没有使她的批评家们沉默。她在此专题的第三次专栏(1991年2月17日)中写道，她收到的成千上万封信中有十分之九是反对她的，其中还包括来自美国国家卫生研究院的一位统计学家和国防信息中心的一位副主任的指责。这些信言辞激烈，说她本人就是一只笨羊，还说女人看待数学问题时跟男人不同。“关于那个游戏节目数学问题，你是彻头彻尾地错了，”乔治顿大学的E·雷·博博(E. Ray Bobo)博士写道，“并且我希望这场论战能够引起公众注意到全国范围内数学教育的严重危机。如果你能承认错误，你就会为改变这个令人痛心的状况做出建设性的贡献。究竟需要多少愤怒的数学家才能改变你的想法呢？”[4]

“当现实与直觉发生激烈冲突时，”萨万特在她的栏目中回复道，“人们就不知所措了，”[5] 这一次她试着用另一种方

法。想像一下,她说,就在主持人打开那扇门,门后出现一只羊的时候,一个不明飞行物降落在舞台上,接着出现了一个绿色的小个子女人。她并不知道你原先选的是哪扇门,我们请她在两扇没有打开的门当中选一扇,那么她随意选中小汽车的机会是一半对一半。"但是这是因为她没有原先那个竞赛者的优势——主持人的帮助……如果奖品是在2号门后面,主持人给你显示3号门;如果奖品是在3号门后面,主持人给你显示2号门。因此当你变换一下选择时,如果奖品是在2号门或3号门后面,你就赢了。也就是说,不管奖品是在这两扇门中间的哪扇门后面你都会赢!但是你若不换门的话,奖品只有在1号门后面时你才会赢。"萨万特完全正确,正如那些迂腐的数学家们最终不得不承认的那样。

■

瓦兹索尼把有关蒙迪·霍尔难题的情况告诉了埃尔德什。"我告诉埃尔德什答案是换一扇门,"瓦兹索尼说道,"然后满以为可以转到下一个话题。可令我吃惊的是,埃尔德什说,'不,那不可能。换不换门应该没什么不同。'这时我对提出这个问题感到后悔,因为我有这样的经历,即人们会因这个答案而变得很激动,从而使得我们的谈话不欢而散。在根本就不可能从容了结此事的情况下,我给他画了一个我在大学的《量化管理技术》上学到的树形分析结果。"瓦兹索尼画出分析树,与萨万特曾经制作的那张罗列可能结果的表格不无相似之处,但这并没有说服他。"真是没办法,"瓦兹索尼说道。"我告诉埃尔德什这一点,然后走开了。1个小时之后,他又回来找我,非常生气的样子。'你还没有告诉我为什么要换门,'他说。'你是怎么回事?'我说我很抱歉,但是我真的不知道结果

为什么会是这样，只是树形分析结果说服了我。他变得更加烦躁起来。”瓦兹索尼以前曾经见过这种反映，是在他的学生身上，但他怎么也不会想到20世纪最多产的数学家也会有这种反应。

“物理学家总是相信概率是与事物相联系的，”瓦兹索尼说道，“就拿硬币来说。我们知道扔硬币时正面朝上的概率是1/2，而物理学家似乎认为这个1/2的概率是与硬币相关的。这是硬币本身的性质，是物理现象。但是假设我拿一枚硬币扔了100次，每次总是反面朝上。我们就会说出了问题了，硬币是假的。事实上硬币本身并没有变，它还是当初我扔的那枚硬币。但为什么我们改变主意了呢？因为我们的脑子得到了新的信息。这就是贝叶斯的概率观。我费了不少功夫才理解概率是一种思维状态。我猜想埃尔德什也有这种概率与具体事物相关的观点，因此他才理解不了换门有什么意义。”

瓦兹索尼退休后的住所位于一个高尔夫球场的边上。当埃尔德什琢磨那道蒙迪·霍尔难题和考虑上帝才知道的其他许多猜想时，“他坚持要在球场边上走，”劳拉·瓦兹索尼说道，“那儿到处都有标志警告人们不要在球场边上走，因为高尔夫球会像子弹一样击中行人。我们试图阻止他，但是他不太容易被说服。他从来不愿意他的自由受到任何限制。”

当埃尔德什散步回来时，瓦兹索尼已经解决了这道蒙迪·霍尔难题。他用的是埃尔德什的新朋友乌拉姆发明的一种新方法：蒙特卡罗法。1946年，当乌拉姆的脑炎正逐渐康复时，他玩了大量的单人纸牌游戏。“在花了大量时间试图通过单纯的组合计算来估计特定纸牌组合的概率之后，我想难道就没有一个比‘抽象思维’更实用的方法吗？要是多次发牌，比如说100次，然后只要数出成功的牌局数不就可以了吗？”[6] 乌拉姆回忆道，“随着高速计算机时代的开始，这样的构想早已

成为可能。我马上想到中子扩散问题和其他一些数学物理问题，并且推而广之更想到如何把由微分方程式描绘的步骤转换成能够用一系列随机过程解释的等效形式。"蒙特卡罗法是为了纪念乌拉姆的一位亲戚而命名的，他总是偷偷地溜到蒙特卡罗去玩轮盘赌。此法的思路是通过在电脑上随意模拟某一事件而计算出发生此事的概率，而不是通过解方程式的办法来计算。换句话说，为了计算单人纸牌游戏中某一特定组合的概率，只需让电脑随机发出几百副牌，然后数出出现给定组合的概率就行了。

瓦兹索尼在他的个人电脑上用蒙特卡罗法模拟蒙迪·霍尔难题。从来都不怎么用电脑的埃尔德什，现在却看着电脑随机地在"换门"和"不换门"之间作出选择。数百次的试验结果证明，换门时赢的概率是不换门的2倍，这时埃尔德什才不得不承认自己错了。但这种模拟并不比用计算机证明四色定理更让人满意：它没有揭示为什么换一下门会更好一些。埃尔德什对瓦兹索尼的解释还是不够满意。他准备走了。

这次是瓦兹索尼和埃尔德什的最后一次见面。埃尔德什想要瓦兹索尼开车送他去旧金山国际机场，这需要2个小时。

"我不想去，"瓦兹索尼告诉他说，"太远了。"

"那我怎么去那儿?"埃尔德什说。

"我把你送上车。"

"那没用。"

"为什么?"

"下车后，我怎么办?"

"你下车后，司机会帮你把行李放到人行道上，在联合航空公司的前台会有一个态度友好的人。你把机票给他看，然后他会帮你拿走行李。"

埃尔德什不乐意自己单独去机场，但最后还是同意了。

“他后来打了电话过来，”瓦兹索尼说道，“并说自己去机场也是一样的。他只是太习惯于被人照顾了。他原以为自己单独一个人会什么也做不了呢。他母亲把他从小带到大，他一直是这么以为的。”

埃尔德什一直念念不忘蒙迪·霍尔问题。他跟格雷厄姆打电话问他有什么“天书”上的证明。格雷厄姆回答说：“蒙迪·霍尔问题的关键是主持人总是存心给你换门的机会，这就是游戏规则的一部分。在你思考这一问题时必须考虑到这一点。”埃尔德什接受了格雷厄姆的解释。

“当他不理解什么问题时，”格雷厄姆说，“他不会轻易让你说服他的。他总爱打断你，而且时常生气。相反，当他试图向你解释什么证明时，要跟上他的思维又很困难。有一次芳蓉被他气得说她以后再也不跟他合作了。在他们两人之间，我总扮演中间人的角色，一半是翻译，一半是调停。保罗解释什么东西时总是丢掉许多思维步骤。要是你跟他在一起呆惯了的话，你可以打断他，并让他把丢掉的步骤补上。芳蓉解释起来同样也丢掉一些步骤，只不过与保罗丢掉的步骤不同罢了。这样，两个人一来一去，丢掉的步骤就太多了。芳蓉曾经解决过保罗确实很关注的一个问题。他让她把答案解释给他听，可她刚开始保罗就建议使用另外一种方法。芳蓉说道，‘不，保罗，我在解释这个。’半个小时后她终于沉不住气了。而保罗却说，‘芳蓉的英语不够好，无法跟我解释清楚。’对于芳蓉来说，这简直是火上加油，因为她的英语棒极了。保罗只是想以自己的方式来看问题。当你想好了一个复杂的论证并且心里有了自己的一套表达方式时，保罗却打断你说：‘好，让我们换一个方式，相反地这样这样定义’，那就如同让一个习惯于右手的运动员用左手去完成一个高难度的动作。‘什么？我连用右手都几乎完成不了这个动作。’”

"保罗在他的暮年才注意到自己的解释有时确实难以理解。他翻阅过去写的论文,发现三四十年前自己的那些论证是多么难以理解。有一次他问我,'你注意到我有什么不同吗?'我回答说,'没有,真没什么。'他说,'还说你观察力那么强,难道你没有注意到最近我那么沮丧吗?'我说,'嗯,也许吧。''我现在发现,'他说,'我正在走下坡路。对此我一筹莫展,真是令人懊恼。'我说,'保罗,你仍然比别人强得多。'他经常请我帮他检查他写的东西,他怕自己犯些愚蠢的错误,但事实上他不会出什么错。"还好是这样,因为他一再强调,要是他不能再从事数学研究的话,他就要自杀算了。

埃尔德什经常依靠他那奇怪的幽默感给自己打气。有一次当他忽视了图论中的一个简单结果时,他说道:"我该受到监护了……匈牙利曾经是一个半封建社会。如果一个富裕的贵族年老发昏,因为酗酒、女人或靡靡之音而挥金如土的话,他的家人就会将他监护起来。他可以得到一大笔钱,但却不能染指其主要资产。"[7]

多少年来埃尔德什一副疲惫而病态十足的样子一直骗过了他的那些朋友。瓦兹索尼回忆说,早在 20 世纪 40 年代,"我们就认为埃尔德什身体如此虚弱,可能光景不长了。他看起来体弱多病,但事实上他却比别的人都活得长。"埃尔德什只是在生命的最后 10 年身体才确有些不行了,但他仍拼命工作。在别的数学家看来,这简直到了疯狂的程度。他有一只眼睛的视力正逐步丧失,但他又不愿意从数学工作中挤出时间来精心护理自己的眼睛。

"有一次他把眼镜掉到地上了,"孟菲斯大学的拉姆齐问题专家拉尔夫·佛得里(Ralph Faudree)说,"有一个镜片破了,但仍留在镜框内。埃尔德什说,'不碍事,反正那只眼睛也看不见。'说着便又戴上了眼镜。我怕玻璃渣子进到他眼睛里,

便把那个碎了的镜片彻底捅了出来。我知道格雷厄姆在他的贝尔实验室里还有一副一样的眼镜,便给他挂了电话,让他们给送过来。没过一会儿,我看到保罗又戴上了一副两个镜片都完好的眼镜。我想眼镜不可能送得这么快吧?‘这副眼镜是格雷厄姆的吗?’我问他。‘不是,’他疑惑地说道。‘这副眼镜也没多大帮助。’他想了想,补充道,‘我准是把别人的眼镜给拿来戴上了。’他迟疑了一会,然后突然笑了起来:‘很可能就是刚才跟我在一起的那家伙的。我得问问他。’”

最后他那只眼睛完全看不见了,急需进行角膜移植手术,可是很难找到合适的捐赠者。拉尔夫·佛得里的妻子是护士,她帮忙给拉了拉线让他在等候者的队列中往前挤了几步。(“医生也应该促进数学的进展,”她跟院方说。)又过了几个月后佛得里接到电话,说合适的角膜捐赠人已经找到。此时埃尔德什刚刚离开孟菲斯,坐在去辛辛那提的飞机上准备到那儿作一次演讲。开始他拒绝放弃演讲而返回来作角膜移植手术,但经过再三说服他总算同意了。

手术持续了两个钟头。手术开始前,医生仔细给他讲了手术过程。

“医生,”埃尔德什问道:“我还能看书吗?”

“可以,”医生说道,“这正是我们手术的目的。”

埃尔德什走进手术室。可灯光一暗下来,他又烦躁起来:“你们为什么把灯给关了?”

“为了手术。”

“可你刚才说我能看书。”

然后他就跟医生吵了起来,说既然做手术的是一只眼睛,为什么他不能用另外一只好眼睛看书呢?医生急得拼命给孟菲斯大学的数学系打电话。“你们能否派一个数学家过来,以便手术过程中埃尔德什能谈论数学?”数学系答应了,手术进

行得很顺利。

"角膜移植手术后,脑子需要一段时间才能学会将两只眼睛对焦,"佛得里说道,"埃尔德什度过了悲惨的一年。他逢人就抱怨看东西重影。这也确实够难熬的,因为对他来说,阅读数学文献是再重要不过的了。"

埃尔德什的心脏也不比他的眼睛强多少。"过去10年来他一直为心率突然增高而烦恼。"佛得里说道,"有一次我跟他在希腊的一家饭店吃饭,他的心跳突然陡增至每分钟150次。我急忙把他送到急诊室。我清楚地记得他紧盯着监视器,从那里可以读出心跳的频率。突然,心跳频率开始急剧下降。我还以为这样下去它会降到0,可在65的时候稳住了。心脏科医生把埃尔德什留在医院,可他仍坚持工作。病床上到处摊满了论文,病房里数学家们像牵线一样进进出出。护士们试图阻止他可又没有办法。他在匈牙利住院时情况也是这样,把医生和护士都逼得发了疯。"

"1998年春我和我妻子去布达佩斯拜访了他。"佛得里的同事、孟菲斯大学的奇普·奥德曼(Chip Ordman)说道,"他心脏有点问题,住进了医院。他跟我说他们不得不把他从一家医院转到另一家医院,因为第一家医院里没有能够容纳那么多人探视的病房。这一次病房大是大了,可仍是乱七八糟。成堆的杂志和论文到处都是。埃尔德什躺在那里,同时进行着三个对话:用匈牙利文和一个角落里的一群人,用德文和另一角落里的一群人,用英语和第三组人。在进行着这些讨论的同时他还要和我们夫妻说话。当医生们走进来时他喊道,'走开! 不知道我这儿很忙吗? 给我几个小时!'医生们果然都走了。"

无论是眼睛问题还是心脏病都阻止不了他足迹遍布25个国家的演讲旅行。他知道听众人数的增多已使他需要越来

越大的报告厅，但他那衰弱的嗓音却又达不到使每个人都听得见的要求。对于自己日益受到欢迎，他是这样猜测的："大家都希望自己能说这样的话，'我记得埃尔德什。你看，连他最后一次讲座我都参加了。'"

在埃尔德什生命的最后一年，也就是1996年，他的日子过得加倍艰难。一年一度的国际组合数学、图论和计算数学会议于埃尔德什生日前后的3月份在佛罗里达的博卡拉顿和路易斯安那的巴吞鲁日交替进行。按照惯例，在这两座城市，埃尔德什的报告都安排在星期四。（1994年在博卡拉顿开会时，他曾抱怨说自己也许是'最后一次平方了'[8]——意指自己年满81岁，也就是9的平方，而不指望自己能活到100岁，也就是10的平方了。）1996年3月，同样也在博卡拉顿，埃尔德什的报告进行了一半，当他站起来往黑板上写字时，突然僵硬地倒了下来。他的血压极低，心率降至37。他僵卧在那里，但麦克风还戴在身上。与会者都吓坏了，保安正安排他们鱼贯而出。"告诉他们不要走，"埃尔德什苏醒了过来，说道，"我还有两个问题要讲。"他的朋友亚历山大·索伊费尔回忆说，那天后来"会议安排了去新奥尔良过斋前节。很自然我提出来跟他呆在一起，可他说道，'尽管去玩吧！我很好，什么事也没有。过完节后请到我的房间来，我有些数学问题和你研究。'"

6月份在密歇根的卡拉马佐举行的一次会议上，埃尔德什听了来自圣克鲁斯的数学家格哈特·林格(Gerhart Ringel)的报告。"当报告结束了，人们正离开时，坐在前排的埃尔德什小声地问了他一个问题。"曾与埃尔德什合著过两篇论文的路易斯维尔大学的组合数学家迈克尔·雅各布森(Michael Jacobson)说，"就在他提问的当中他突然昏厥倒下了。后来那个上午医生们给他装了一个心脏起搏器。那个晚上的告别宴会埃尔德什还是参加了，在他的左右坐着两位心脏科医生。保罗

站了起来，微微鞠了一个躬，介绍完两位医生后说道，‘现在我想完成我对林格博士的提问。’说数学就是他的生命，此话一点不假。”

“他从不希望别人同情他。”索伊费尔说，“他从卡拉马佐给我打电话时根本没提自己装心脏起搏器的事，倒是问及我的孩子和妻子，还询问了有关我欧洲之行的计划。我说我要来布达佩斯。他说，‘不，我是去布拉格。’至于他的心脏的事他却只字不提。我还是后来才知道这事的。9月份我在布拉格正准备拜会埃尔德什时，悲痛地听到了他去世的消息。他给我们的印象是他将永远活下去。几十年来他一直拿年老和死亡开玩笑。所有这些有关年老的幽默都是他给我们注射的疫苗，让我们觉得他永远不会离开我们——或者至少会和我们活得一样久。”

第 7 章
幸存者的集会

亲爱的罗纳德：

如果你知道的话，请把保罗大叔的生日告诉我。这样的话，我们也将有所期盼，不必那么沮丧了。

谢谢。

爱德华

附：我希望他正在极力给 SF(最高法西斯)添麻烦。

爱德华：

我想埃尔德什现在正忙于阅读“天书”，暂时还不会给任何人添麻烦。保罗的生日是 1913 年 3 月 26 日。

罗纳德

那是 1997 年 3 月，孟菲斯大学，学生们都放寒假了。要不是来自四大洲的 260 位国际一流的数学家在此参加美国数学会第 919 次会议的话，校园里将是空空如也。苹果树上鲜花绽放，鸣鸟正展示自己的歌喉求偶，附近的密西西比河里黄水泛滥。在一个盒子形的砖体建筑里，数学家们正欢快地聚在一起进行长达两天的证明和猜想。报告厅连窗户都没有，数学家们对于室外春天的气息无动于衷。

从这栋普普通通的建筑的设计上一点也体会不到屋子内

的高雅思想。砖头上没有刻着“π”的符号,周围没有高斯或者欧拉的雕像,也没有阿基米德在沙子上画圆圈或者高喊着“尤里卡”半裸着身子蹦出澡盆的浮雕,更没有亚历山大时期希帕蒂亚痛苦的画像。公元5世纪初,希帕蒂亚死于一群暴徒之手。他们将她拖出教室,用牡蛎壳扒了她的皮

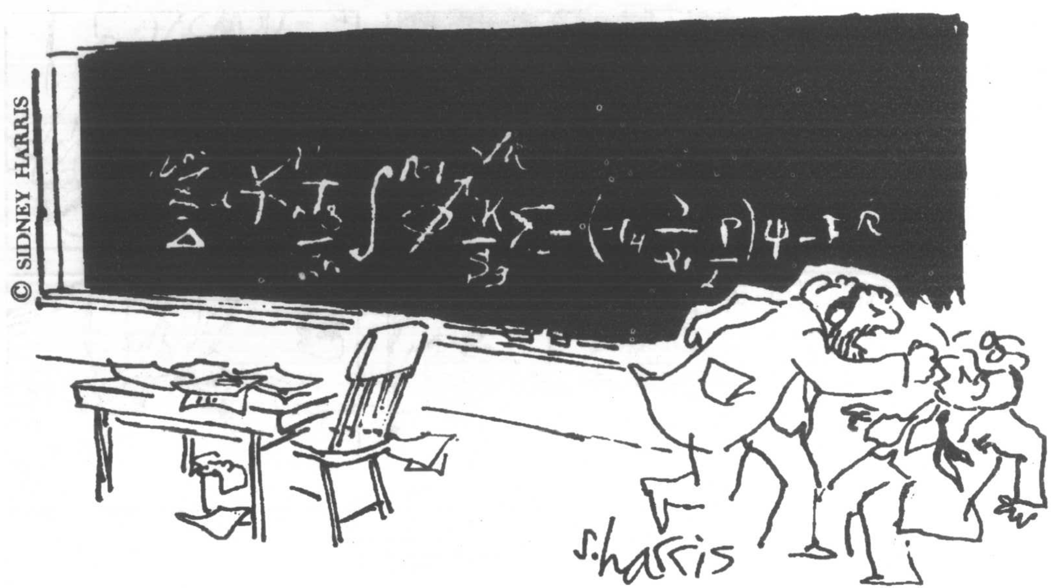
从这个地方的特征中一点也看不出什么,倒是走廊的墙上漫不经心地贴着的几张通知告诉人们这就是数学系。一张被晒得褪了色的橘黄色告示事关遍历理论的一次会议,一张颜色更为黯淡的通知有关准共形映射的一次特别讲演,另外一张则为即将召开的图论会议征集论文。墙上还有埃尔德什的讣告、各种各样的格言(“数字保障安全”,“数学家们干得更好”)以及五花八门的心得,包括来源不详的下列短文:

> 有些国家的教法是大学教授站在教室前面的讲台上照本宣科。提问式的教法则被认为是粗鲁的美国方式。与我们美国人习惯的教法相对立的一个极端例子是著名匈牙利分析学家F.里兹(F.Reisz)的授课方式。他经常带着助教和副教授作为自己的助手。副教授把要讲的东西写在黑板上,而里兹则站在教室的正前方,双手挽在背后,不时高贵地点点头。

墙上的漫画更是让人忍俊不禁(见217页和218页图)。

但在所有这些数学通知中还有这张奇怪的圣灵降临节传单:“上帝之身,希望在你。(圣灵通过讲其他语言而显示。)”在一张写满数学符号的黑板上是用孩子般稚嫩的笔迹写下的一行大字:“耶稣对自己说:‘我就是道路,我就是真理,我就是生命。无论是谁,都必须通过我才能找到圣父。’”在孟菲斯这个圣经腹地,数学家们也和其他人一样试图揣摩SF的心思。

一位50来岁、个儿矮小的人正在走廊里踱来踱去,准备



“你想要证明？我来给您证明吧！”



*杜纳斯伯里(Doonesbury)是美国漫画家加里·特鲁多(G B Traudeau)的著名漫画，于1970年开始连载。杜纳斯伯里是个在争论中很少取胜的成绩偏下的学生。——译者

自己即将开始的发言:“脑细胞不用就会衰退,对于这一点我就是活生生的证明。”他说,“自从我在学校有了行政工作后,这几个月来几乎没有什么时间从事数学工作,脑袋都生锈了。要是上台后我说不出证明中的步骤来那可就丢人了。也许我应该把我的年轻合作者带来,让他来发言。埃尔德什喜欢开玩笑说我们每天都损失50 000个脑细胞,我的体会证明了他说得对。”

在这位紧张的踱步者身后的黑板上是悉尼·哈里斯(Sidney Harris)创作的一幅漫画,漫画的内容也不会让他轻松多少:一位年老的数学家正目光呆滞地盯着黑板,黑板上是下列算式:

$$\begin{array}{r} 2 \\ + \quad 4 \\ \hline \end{array}$$

另外两位年轻数学家正从旁边那块黑板前面盯着他,他们的黑板上写的是复杂得多的问题。其中一个年轻人对另一个耳语道:“他过去可是维也纳的大人物。”

就像象棋大师和芭蕾舞明星一样,著名数学家也担心远在他们年老之前自己的能力已在走下坡路,正如埃尔德什引用他的朋友乌拉姆所说的话:“一个人衰老的第一个标志是忘记了自己的定理,第二个标志是忘记拉上拉链,第三个标志是忘了拉开拉链。”

那个踱步的老人突然停止了踱步,眼睛瞥向一间会议室。一个还不至于为年老而担忧的年轻人正结束自己成功的演讲。他停了下来,两眼紧盯着黑板上的那一长串符号。过了一会儿,他耸耸肩,转向听众说道:“看起来这个结论似乎不可信,可仔细想它半个小时后,你就会知道它的确是真的。”听众们都笑了起来。他的发言完了,可还有三个听众留在座位上,要求跟演讲人作进一步的讨论。

其余的听众鱼贯而出，径直走向一张折叠桌，桌上有两个棕色的大塑料桶，分别标着“含咖啡因”和“不含咖啡因”。在那位图论家演讲之前他们就已经喝饱了水，可现在奇怪的是桶上的标签倒了个儿。数学家们的心情还处于极度的兴奋中，他们疑惑地盯着两个塑料桶，连他们的智囊，一位在无限图论领域明察秋毫的专家对于究竟哪个是哪个的问题也一筹莫展。

最后，一个长着啤酒肚、身穿印着“集合之乐”的T恤衫的人满脸笑容地走了出来，从每个桶里各取一半装满了他的塑料杯。他的同事笑着说道：“那就是博弈论的解法。”

“我还有另外一种解法，”一位瘦个子男人说道。他的双手轻轻颤抖着，显然是咖啡因摄取过多。他从其中的一个桶里取了四分之一杯饮料。“这是非对称解。”他说道，“我已经够兴奋了，所以只需要再喝一点点就行了，不管杯子里是什么，我都赢了。”

一位不是数学家而是物理学家的旁观者不理解为什么需要这样复杂的思考。他指出有一个桶要比另外一个桶大，可以认为大桶里含有咖啡因，因为喝含咖啡因饮料的人要比喝不含咖啡因饮料的人多。数学家们都为这一解法的简洁而惊叹。这时，那位物理学家说道：“我们采用的不同解法让我想起了一个笑话。一位物理学家和一位数学家一起坐飞机，并且各自都记着飞行日记。在飞过艾奥瓦州时他们看见一匹白马。物理学家写道：‘艾奥瓦州有一匹白马。’而数学家却写道：‘在中西部的某个地方，存在一匹马，从上面看是白色的。’”

■

1974年，对数学真理的追求第一次将埃尔德什带到了孟菲斯。他来这里是为了访问两个年轻人拉尔夫·佛得里和迪

克·谢尔普(Dick Schelp),他们解决了拉姆齐原理中一个棘手的问题从而给埃尔德什留下了深刻印象。埃尔德什感到跟他们在一起很有收获,于是他每年都要回到孟菲斯这座峭壁上的城市,有时一年要去4次,直到1996年为止。他的这些访问是如此成功,以至于和佛得里一起写了46篇论文,还和谢尔普以及孟菲斯大学的其他数学家合写了3篇论文,其中包括移居美国的匈牙利数学神童贝拉·波洛巴斯。波洛巴斯于1957年赢得以高难度而横遭非议的匈牙利大学生数学竞赛,当时他才14岁。他被奖励在布达佩斯的一家饭店和埃尔德什见一次面。"我9岁时就很想从事数学工作。"波洛巴斯回忆说,"但我还不知道有什么所谓的数学家。我是说,为什么人们要给数学家报酬呢?"[1] 埃尔德什显然给了年轻的波洛巴斯一个满意的答案,因为他们的第一次会面就是他们长达40年合作的开端,这些合作导致了15篇论文的发表。

埃尔德什和波洛巴斯于1996年3月在孟菲斯最后一次见面。一年一次的孟菲斯会议恰逢埃尔德什的生日。用埃尔德什的话来说,这些年会是他"生日的提示标记"。1996年他满83岁时说道:"要是38岁,而不是83岁就好了。在许多语言里,"接着,他又用匈牙利语(*Rossz oregenk lenni*)、希伯来语、法语和德语重复说道,"年老是不愉快的事。"[2]

但不管年老与否,他活跃的性格始终没有改。他骂田纳西州将要禁止老师讲授进化论的"猴子提案"是"法西斯式的愚蠢"。[3]"你们知道我是什么意思,"埃尔德什在结束自己的正式演讲时说道,"除了数学以外,任何事情都是要结束的,数学演讲也是这样。我还活着的话,我会回来的;否则我就不来了。"[4]

自然,埃尔德什没有能够回来。1997年年会期间他的缺席留下的空白让与会者感受至深。他的生日终于成了他的纪

念。保罗·埃尔德什的纪念演讲会从贝拉·波洛巴斯开始。"这应该是一个欢乐的聚会。"波洛巴斯跟200位与会者说道，"因为我们聚集在这里是为了庆祝埃尔德什的一生。"可看起来谁也不"欢乐"。显然，波洛巴斯正在介绍的重点发言人、埃尔德什生前好友的遗孀薇拉·索斯亦是如此。薇拉·索斯本人也是埃尔德什的重要合作者，他们两人共同发表了35篇论文。"我和埃尔德什初次见面是在1948年，"她讲道，"那是他的一位朋友，同时也是我的高中老师蒂博尔·加莱(Tibor Gallai)介绍我们认识的。将近40年后我们在华沙见了最后一面。就在他去世前的那一天我们还在一起讨论了很久，那时他正准备写一篇论文。"她把埃尔德什的信件的复印件放到了投影机上，众人看着他那潦草的笔迹着了迷。"最近的一项研究成果肯定能让埃尔德什高兴。"薇拉·索斯接着说道，"可惜他已经看不到了。"这时下面有人喊道："'天书'里可能就有这一结果，说不定他现在正在看呢。"大家都赞同地点了点头。"如果我们希望记住埃尔德什的话，"索斯说道，"我们就应该去证明他的猜想。这才是最好的纪念。"她的讲话博得了与会者的欢迎。然后，她又请大家翻阅了埃尔德什和他母亲的相册。

"保罗对他母亲的爱是举世无双的，"约翰·塞尔弗里奇说道，"我是在1966年春天了解她的。她是一个善良的女性，我们都像保罗一样叫她'安育卡'(*Anyuka*，母亲)。我和保罗在伊利诺伊大学解决了一个150年没能解决的古老问题时，她就在那儿。"那个问题就是证明连续整数的乘积不可能是整数的平方、立方或其他更高次方。塞尔弗里奇说，埃尔德什提供了证明的关键思想，"我跟他共事，帮他完善几件工作。我的贡献是微不足道的。我跟他说，'这一证明确实是你的，我只是帮帮忙而已。'可他不这么认为。他坚持说这篇论文是我们

合著的，结果论文就以我们共同的名义发表了。能合著这么一篇重要的论文，我当然是再高兴不过了。他心胸坦荡，经常鼓励我从事一些我想都不敢想的数学研究工作。我以产出少而著名，结果花了9年时间才完成这篇名为'连续整数的乘积不可能是整数的高次方'的论文。1975年论文最终发表时，在它的前面特别感谢了埃尔德什的6位朋友，这些数学家们从1966年开始这项工作到最终准备发表论文这段时间里一个个相继去世。"

"保罗死后，我去参加了在布达佩斯为他举行的葬礼，"塞尔弗里奇说道，"我讨厌去参加葬礼，但这一次我很高兴我去了。"官方的纪念仪式于1996年10月18日星期五上午11点举行。这是匈牙利规模最大的仪式之一，共有500多人参加，有点像国家元首的葬礼。那个周末又举行了一次数学界的纪念仪式，星期一埃尔德什的几位生前好友将他的骨灰护送到拉科斯克莱兹托的犹太人公墓，跟他父母的坟墓在一起。塞尔弗里奇说道，他等到别人都走了以后，弯下腰，"抚摸着那块已有25年之久的墓碑，只叫了一声'安育卡'。我知道保罗和他母亲之间的爱是多么地深。保罗和我之间的感情也很深厚。"

■

孟菲斯会议结束后，作为会议主要组织者的拉尔夫·佛得里将留下来的人请到他家举行了一次"幸存者的集会"。佛得里家的餐桌上铺着一块带有前些年与会者签名的粉红色旧餐布，上面好几处有埃尔德什潦草的签名。餐桌旁边有一面特别大的黑旗子。"这面黑旗的背后还有一个故事呢。"佛得里解释说，"这儿作为埃尔德什生日的'提示标记'已经有好几

次。他说,应该挂一面黑旗来庆祝他的生日。有一年,我的妻子帕特果然把他的话当真了,给他做了一面黑旗和一个黑蛋糕。"这一次,这些"幸存者"看着那面黑旗子还感到分外亲切,他们又在餐布上签下了自己的名字。就在他们吃着手扒猪肉和烤豆子、喝着啤酒的当中,还不住地讲述着有关埃尔德什的故事

"70年代埃尔德什第一次来到孟菲斯的时候,"现为孟菲斯大学一位系主任的佛得里讲述道,"他每天仅仅需要3小时的睡眠时间,每天很早就起来写信——都是有关数学的。他睡在楼下。他第一次呆在这儿的时候,时钟给弄错了,早上4点半时时钟却指示为7点。他想我们也都该起来工作了,于是把电视打开,并把声音开得大大的。后来,当他和我更熟悉以后,他每天早上早早地就来敲我卧室的门,'拉尔夫,你还活着吗?'他的工作节奏真是逼死人。他希望每天都从早上8点工作到深夜1点半。当然,一天当中也有短短的吃饭时间,但就在这种时候他也会在餐巾上写写画画或是不停地讨论数学。等他住上一两个星期后你都快要崩溃了,但就在他走后的几天里,他还会不断收到他的电话。'证明完成了没有?你把它交给打字员了吗?'我跟别人说,我曾经试着在楼下我们称之为'埃尔德什套间'里睡过,但这对我研究数学的耐力似乎无济于事,然而即使这样,我还是邀请别的数学家去作了同样的尝试。"

"佛得里熬不过埃尔德什,这种情况并不是个别的。"迈克尔·雅各布森说道,"我是1976年认识埃尔德什的,当时我还是埃默里大学的研究生。他作完一次讲座后就宣称'我的脑子已经敞开了'。这实际上是在邀请大家跟他讨论数学。于是我走上讲台,把我正在研究的一个组合论问题告诉了他,结果他毫不犹豫地跟我说:'我认为你需要寻找另外的问题'。

换言之，他是说这个问题太难了。我一下子就泄了气——要知道，我还只是一个学生。万幸的是，我还没有被吓得放弃数学。7年以后，当我在路易斯维尔跟他提起我们第一次认识时他说的话时，他把那事全忘了，要我把那个问题复述一遍。等我讲完后，他说道，'哼，这个问题的确太难，到现在还没有解决呢。'他说得绝对正确，可见他的数学洞察力是多么令人不可思议。在21年之后的今天，这个问题依然悬而未决。"

"1976年我认识他时，他总嫌时间不够。为了寻找有一丝天才的人，他不得不对所遇到的人很快就作出估计。当他说我那个问题太难时，我猜他已经认为我没有什么天才了。但我的一些朋友则认为，他一定是认为我有可取之处，因为后来连续10多年他每年都来路易斯维尔找我，而且一呆就是一个星期。他第一次来路易斯维尔是1983年。那时候我还单身一人，因此我们就住在一起。那种经历确实令人兴奋。我自然听说过有关他工作不要命的一些故事——并且我也期望能跟他一起拼命工作——但对于如此的努力程度我还是鲜有准备。头一天我们就工作到半夜1点，我已经精疲力竭，上楼睡觉去了。他呆在楼下的客房里。凌晨4点半，我听到厨房有响声，他把锅碗瓢盆弄得一片响，那是在告诉我该起床了。大约6点钟时，我跌跌撞撞地下了楼。你猜他说的第一句话是什么？不是'早上好！'也不是'睡得好吗？'而是'设 n 是整数，k 是……'我只穿了一件浴衣，半裸着身体，眼睛还是半睁半闭，朦朦胧胧。我认输了。我告诉他，不洗一个淋浴的话，我是没法接着研究数学的。"

"尽管埃尔德什每天只睡3个小时，"埃默里大学的数学家罗纳德·古尔德(Ronald Gould)补充说，"他白天还是时常小睡一会。但即使那时他也在研究数学。有一天晚上我向他解释一个问题的证明。他打起盹来，我想他没在注意我的讲话。

可等我一停下来他就会抬起头来,让我接着讲。然后又是打盹,我一停他又会醒来,接着又是打盹,醒来……整个晚上都是这样。可让人吃惊的是,他竟然理解了证明过程!"

不仅是他花在数学上的时间令人难以置信,他研究数学的场合也与常人不同。婚礼上自不必说,葬礼上照样可以,节假日也不例外。"1983 年的圣诞节前夜我一家都在布达佩斯,"范德比尔特大学的迈克·普卢默(Mike Plummer)说道,"这儿圣诞节可是一个隆重的节日,各家各户都团聚在一起开拆礼物。城市都停止运作了,所有单位都打烊,连公共汽车都不开了。要想坐出租车的话,几天前就得预订。我们都穿好了衣服,等着出租车来接我们去看一个朋友。正当我们站在屋里时突然听到一阵敲门声。我打开门一看,是埃尔德什站在那里。'普卢默,'他说道,'圣诞快乐。设 $f(n)$ 是以下函数……'就这样我们一直讨论到出租车来时为止。要想止住他的话而离去那是很困难的。"

就像保罗大叔的其他"保姆"一样,佛得里也发现这个客人不好对付:"他对温度和空气很敏感。我家的房子有两层,每层都有各自的空调,楼下的空调开关在他常睡的那个房间外面。有一次另外一位来访的数学家住在那个房间,于是我们就让埃尔德什睡在楼上。他感觉很热,就跑到楼下去调节空调。当然这对楼上的温度无济于事。于是他就不住地跑上跑下去折腾空调。第二天早上我们起床后发现楼下的窗户上都结了霜!"

"他不喜欢关门闭户,所以有一次我们就帮他把窗户打开后睡觉去了。后来下起了暴风雨,他跑上楼来,把我们叫醒后说道:'雨下到窗户里面来了,你们最好想点什么办法。'"

虽然他对周围的物质世界无知得不可救药,但他总存有一颗善良的心。"每次他回到匈牙利时,"薇拉·索斯说道,"他

总要问候那些年迈的妇女们。光花在这些数学家的母亲和遗孀上的时间就要耗掉他回来后的头两三天。”

1994年在布达佩斯，埃尔德什让左尔坦·弗勒迪（Zoltán Furedı，一位曾与他合著过9篇论文的匈牙利年轻组合数学家）跟他一起去看望一位老朋友——他的一位数学同事的岳母。“她坐着轮椅，”弗勒迪回忆说，“并且出于某种原因生活在精神的苦楚之中。她不住地埋怨她的保姆，说着‘别放在那儿！’‘为什么不先给埃尔德什教授先生上茶？’以及其他一些蠢话。我们大约谈了1个小时——主要是埃尔德什在说话。临走时保姆把我们送出门，埃尔德什给了她一份相当丰厚的小费，好像是对她所受委屈的一种安慰。这件事给我留下了深刻的印象。他总是那样独立特行，从来不忘了做好事。

“他确实是一位了不起的人。在过去3年内我一直为离婚的事而伤脑筋。他每一两周都要给我打一次电话，每次总要问一问孩子们怎么样，并且安慰我说他为我感到难过。然后，他就开始往我脑子里灌一些棘手的数学问题。他是想让我专心于数学研究而帮助我摆脱困境。我一直在设法完成我们从1992年开始做的一篇论文。如今他走了，我得更加努力地工作以便早日完成这篇文章，这是我欠他的债。”

“他确实是一个关心别人的人。”佛得里说道，“他关心我的孩子们，总是问及他们。一旦有点什么事，他也一起担忧。1981年我第一次去匈牙利呆较长的一段时间，他让所有的人照顾我和我的一家人。他让一个人负责我们的医疗保健，另外一个人负责孩子们的上学问题。对于需要帮助的人，他总是热心帮助。当身无分文的俄罗斯数学家们来到匈牙利时，他把自己所有的钱都给了他们。”

“他关心别人所关心的事，即使是他不喜欢的东西也是这样。比如说，他不喜欢狗。一有狗接近他时，他会说：‘那个法

西斯猎犬会不会咬我?'可我们家有几只狗,他能容忍它们跳到他的身上来欢迎他。'很好。'当狗跳上来时他会说,'它们还记得我嘛!'因为他比我们起得早,因此我们常常把咖啡和麦片给他留在外面。有一天我来到楼下时发现满地都是麦片。我想不通这是怎么回事:即使是他新开了一盒麦片,在使劲撕开塑料袋时也不可能撒出这么多来。我实在猜不透,只是把它们扫了起来。第二天早上我下楼时发现地上又是一地的麦片,埃尔德什正坐在那里,一把一把地给狗喂食麦片呢。"

无论在谁家里,埃尔德什总是不好对付。"保罗老是喜欢洗手。"迪克·谢尔普回忆说,"他总是担心传染了细菌。你可以给他拿一条新毛巾出来,但他却不用。他宁愿把手甩干。我儿子说,埃尔德什一用过浴室后,浴室就变成游泳池了。到处都是水。"

水至少是可以清除的,但保罗大叔的其他一些"保姆"却没有那么幸运。"有一次他住在我孩子的卧室里,"普卢默回忆说,"他有多种的皮肤过敏症,随身带着各种各样的护肤品,以便根据皮肤的感觉作出相应的选择。他洗完澡后感觉皮肤不舒服,但又不能肯定选用哪种护肤品合适,于是擦了护肤膏和滑石粉。结果他把护肤膏和滑石粉弄得到处都是,连卧室里也留下了脚印。到现在那些脚印还在呢!"

埃尔德什的保姆们可以聊以自慰的是,他对他自己的东西也是如此。佛得里说道:"我记得有一次他弄坏了别人刚刚给他的一件崭新的衣服。我们驱车从孟菲斯去路易斯安那州。正常路径应该是走55号州际公路,但埃尔德什坚持要走风景好一点的地方,于是我们就决定取道纳齐兹看一看战前的民居。我们沿着民居后面的密西西比河岸步行时碰上一道链状的隔离墙,墙上带有小尖铁。隔离墙一直延伸到河边,挡住了我们的去路。保罗一向性子急,坚持要越过去。我和谢

尔普轻而易举地越了过去，保罗一爬上去正好坐到了尖铁上，当他往下跳时我们听到了'唰'的一声，他的裤子在臀部撕开了长长的一道裂口。他很难堪。我问他：'保罗，你还有别的裤子吗？''不，没有。'他回答说，'这是我唯一的一条好裤子。我还有另外一条，但它令我的皮肤受不了。'我们到达路易斯安那州后，他径直去了自己的房间。我们正准备把他的裤子送到裁缝那里去补一补时，他脸带笑容地走出来说，他照了镜子发现没问题，因为上衣盖住了裤子的裂口。第二天我们去吃午餐时，他又性急起来想走一条他认为是捷径的小道。我跟他说：'我想这条道过不去。'他问：'为什么？'我回答说：'我认为那头有隔离墙。'他笑了笑，说道，'匈牙利有一句谚语：在儿子刚被吊死的人家里不要提绳子。'"

原书空白页

第 8 章

“我们数学家都有些疯狂”

我不是数学家。我从来也没有证明过数学定理，更谈不上提出什么惊人的猜想。我的“埃数”为无穷大。然而，我也参加了孟菲斯的“幸存者集会”并且感觉很自然，因为我也为保罗·埃尔德什所打动——他的天真、脆弱，他的执着、大方，甚至他有关上帝的顽皮的打趣。

我环顾四周，看了看他的追随者。这是一个有趣的组合：男女老少，形形色色，神态各异。有的大腹便便，有的骨瘦如柴；有的破衣烂衫，有的衣冠楚楚；有的老态龙钟，有的青春可掬。至少有十几个国家的人从四面八方聚集到一起，为的是探求普遍的数学真理。数学的殿堂宽容大度，只要是有此严肃追求的人，它都兼容并蓄。孟菲斯的“幸存者”中有的是机智诙谐的人，他们都像埃尔德什一样警语迭出。也有少数几位羞羞答答，独自坐在那里啜呷着啤酒。他们中大多数人精神都很健全，只有那么一两位看起来像门诊病人一样有点紧张。

在数学领域里，“疯狂”两字并不让人见外。“1935 年当我在剑桥初次认识兰道(Landau)时，”埃尔德什喜欢回忆这些事，“他跟我说：‘*Wir Mathematiker sind alle ein bißchen meschugge*’。意思是说，我们数学家都有些疯狂。1932 年我认识了一位主要研究三角级数的匈牙利数学家，名叫希东(Sidon)。他是一位很不错的数学家，但他的疯狂程度又在一般的数学家之上。实际上，他已接近于精神分裂了。他们说他经常以这样的方式跟你谈话。”[1] 埃尔德什说着，便仿效起

希东的样子，转过身去，紧贴着墙。“但一旦他讲起数学来，可一点也不含糊……1937年我和图兰造访他（他还患有迫害综合征）时，他把门打开一条缝，说道：‘请换另外一个时候来找另外一个人’（*Kérem joljenek máskor és kulonosen máshoz*）——用匈牙利语说起来似乎好听一点）。但后来他又神智清醒了。现在无论如何，让我们忘记这些伤心事吧！事实上，他的去世也像素兰诺·德·伯格拉克（Cyrano de Bergerac）一样有些蹊跷。一个梯子倒下来砸断了他的一条腿，后来他因肺炎在医院去世。但不管怎样，他没有活到看见自己享有如此高的知名度的时候，这总是让人惋惜。今天，似乎每一位数学家都知道希东这个名字了。”

格雷厄姆说道：“在数学领域里，你可以与正常程度相去甚远，但仍然可以维持生计。在这里，你可以看到许多人，他们是不可能以其他工作谋生的人——譬如说不能当零售商。但他们的自制力却可以供他们从事数学工作。可是，还有一些人却越过了这一界限，比如说约翰·纳什（John Nash）。”纳什是普林斯顿大学的数学家，1949年他年仅21岁时写了一篇关于博弈论的27页的博士论文，这使他在近半个世纪后的1994年获得了诺贝尔经济学奖。他因解答问题的闪电式速度而被教授们称为“年轻的高斯”。1958年的《财富》杂志赞扬他为“新数学”的闪亮明星。但就在那时的创造力高峰时期，他患上了精神分裂症。他时常听见奇怪的声音，总认为有陌生人在监视他。他还莫名其妙地把人和数字扯在一起，比如说下面这张一句话的明信片上的联系：“今天我坐了77路公共汽车，这让我想起了你。”后来，他被送进马萨诸塞州贝尔蒙特的精神病医院，时年才30岁，跟他一起进入的还有诗人罗伯特·洛厄尔（Robert Lowell）。但是，纳什并没有因此而康复，后来就一直游荡在普林斯顿大学的教室和图书馆内，成了丽贝卡·

戈尔茨坦(Rebecca Goldstein)的小说《心身问题》里的一个主人公"教室里的幽灵"。但在20多年后,当诺贝尔奖评奖委员会经过激烈争论裁决将该奖授予精神病人是合适的时候,纳什的病情竟然在没有用药或诊治的情况下奇迹般地好了起来,使得他能够去斯德哥尔摩接受这一殊荣。[2]*

纳什和希东的情况并非个别。康托尔曾经染上幻觉的毛病,哥德尔也曾得过偏执狂症,而那位决定在合数的日子里不过性生活的数学家最后却转向了暴力犯罪。还有那位专爱在校园和飞机上作案的爆炸嫌疑犯西奥多·卡斯左恩斯基(Theodore Kaczynski)也是于1962年在密歇根大学获得数学博士学位的。

"我有一个理论,"格雷厄姆就有关于数学和疯狂的问题说道,"在众多的数学领域里,创建自己的数学世界似乎是自然和适当的事情。数学家们有各种各样的选择。他们希望考虑有着这样或那样性质的结构,他们可以选择这一种而摒弃那一种。相反,物理学家却没有这样的自由:他们受自己竭力去研究的物质世界的限制。在物理学中,你不可能去假定重力与距离是立方反比关系,因为它本来就呈平方反比关系。而在数学中你却总是能够这样做。请记住斯特劳斯是怎样说爱因斯坦的:他害怕进入数学是因为在数学中不清楚究竟该提什么样的问题。在物理学中重要的问题是什么这一点很清楚,而且物理学家也一直致力于解决这些问题。而在数学中你甚至连该从哪儿下手都不知道。

"在数学中从事新奇的工作是物有所值的,由此甚至可以搭上你的毕生精力。在数学中有自行构造规则的倾向,例如说 $A+B$ 不等于 $B+A$。尽管大家都知道两者是相等的,但不

---

* 参见《普林斯顿的幽灵——纳什传》,上海科技教育出版社,2000年。——译者

妨假设它们不等呢？这时又会得出什么样的结果？当你能够靠左行驶的时候为什么必须靠右行驶呢？

“当然还有些人，他们本不是那么奇怪的人，但他们却故意表现得行为怪异，因为人们会认为这就是天才的标志。爱因斯坦曾经向一个朋友抱怨说，科学声望的代价就是人们总想上来跟你搭话。那位朋友回答说，你可以顷刻之间结束这种状况，那就是剪掉头发。

“在图论中有一类问题称为极值问题，即关于极端情况的问题，如‘一个图可能有的边数最多是多少？’埃尔德什就曾经研究过这类问题。我听说有一位欧洲贵族曾经买下一个歌剧院并把票都送给了自己的朋友们。然后，他让所有秃顶的人都坐在某一特定的区域，以便他们从包厢往下看时眼下一片光头构成见所未见的独特风景。这则故事给了我一个念头，那就是召集一个由极端的数学家参加的会议。我会同时邀请所认识的所有怪人而不告诉他们为什么邀请他们参加，看他们自己能不能猜出来。”

许多人进入数学世界都是为了寻找逃离现实世界的庇护所。“我同意叔本华(Arthur Schopenhauer)的看法，”爱因斯坦曾经说道：“人们进入艺术和科学世界的强烈愿望之一就是逃离痛苦、残酷和枯燥无味的现实生活，逃离自己飘浮不定的七情六欲的桎梏。气质高尚的人渴望脱离个人生活而投入客观知觉和思维的世界。”[3] 伯特兰·罗素年轻时遭遇痛苦，曾自寻短见，但最终没能这样做，因为还有数学问题在等着他解决。还有一些人之所以没有活下来，是因为他们没能解答救活罗素的那些问题。逻辑学家喜欢拿“黑色定理”开玩笑，说黑色定理会把它的发现者逼疯了。格雷厄姆说道，由于脑力不济，“许多甚至是智力偏上的人都脱离此行了。当他们知道对这些问题不可能曲尽其妙时，就变得沮丧不定起来。集邮者可

以将所有的邮票收集起来，而数学家却不可能证明所有的定理。这是挺让人懊恼的事。”

■

1986年，罗纳德·格雷厄姆把我介绍给了埃尔德什。第一次会面时埃尔德什几乎没有注意到我的存在，低着头不知是在思考什么猜想。那时我就决定花几个星期跟踪埃尔德什周游世界，目睹他神不知鬼不觉地出现在他那些同事们的檐下，匆忙道过寒暄而直入数学话题。每次在埃尔德什可能决定访问哪位客人之前，罗纳德都要先帮我挂个电话以便对方能够容纳我的存在。埃尔德什睡在哪儿，我就跟着睡在那儿，一天连续19个小时不睡觉，看着他不断地证明和猜想。眼看着年仅30岁的自己熬不过病病恙恙的73岁老人，我感到挺不是滋味。不过我所依赖的仅仅是咖啡因而已，也许我也该像他一样服用兴奋药剂。

我把跟随埃尔德什旅行的经历记在日记里，并把他的故事寄给了《大西洋》杂志。故事发表后引起了广泛的注意。几年后，我有一次碰上了埃尔德什，便问他认为怎么样。他反问道：“什么怎么样？”“我写的故事。”我回答说。“啊哈！那个故事，”他说，“你现在有吗？”我给了他一份杂志。他把它凑到脸前，斜着眼一页一页研究起来没完。我终于忍不住又问道：“你觉得怎么样？”他把头从一边摇到另一边。“不错，”他说道，“只是有一点不好。”我满以为他会更正我对切比雪夫的发现或四色问题或者是素数定理的解释。“你不该提苯齐巨林的事，”他说道，“我不是说你写得不对，只是我不想让那些有志于从事数学工作的年轻人觉得要想成功就得服用兴奋药物。”这就是埃尔德什，他总是念念不忘那些“ε”。

原书空白页

注　释

第0章

1. Quoted in Alexanderson [December 1979], 87
2. Quoted in ibid , 91.
3. Quoted in Hargittai [Fall 1997], 38
4. Larman [September 28, 1996]
5. Nathanson [October 19, 1996]
6. Quoted in Alexanderson [December 1979], 85
7. Goffman [September 1969], 791
8. Rota [November 1996]
9. *http: //www. oakland. edu/ ~ grossman/ erdoshp html*
10. Pach [Spring 1997], 41.

第1章

1. Quoted in Saville [March 10, 1995]
2. Pach [Spring 1977], 45
3. Ulam, Stanislaw [1976], 55.
4. Hardy [1940b], 80, 89
5. Ibid., 90
6. Reverend Hugh Jones and the octary system, Kramer [1970], 13.
7. Hardy [1940b], 128.
8. The url of the largest known prime is *http://www. utm. edu/research/ primes/largest.html* and the url of the Great Internet Mersenne Prime Search is *http://www. mersenne. org/prime html*
9. Frank Nelson Cole and $2^{67}-1$ Quoted in Gardner [March 1964], 126.

10 Cooper, Roger [April 13, 1991], 236, 237

11 Kac [1985], 90

12 Hal Shapıro and the upstaged paper Bellman [1984], 114, 115

13 Gauss's letter to Johann Franz Encke, 1849 Quoted ın Hall [1970], 14, 15

14 Guy [January 10, 1997]

15 Quoted ın Roddy [October 18, 1996]

16 Hardy [1940b], 113.

17 Wıllıamson and Erdős. Conversatıon wıth Wıllıamson; and quoted ın Babaı [January 1998b], 66, 67

18 Golomb [Fall 1996], 7

第2章

1 Shoe store dıalogue from conversatıon wıth Vázsonyı; and from Vázsonyı [December 1996], 59, and [March 1997], 19

2 Lukacs [1988], 12.

3 Hungarıan journalıst quoted ın Rhodes [1986], 105.

4 Krúdy quoted ın translatıon ın Lukacs [1988], 21, 22.

5 Yom Kıppur and Maupassant. Babaı [1996], 52.

6 1910 statıstıcs on Jewısh occupatıons. Rhodes [1986], 105.

7 Koestler [1952], 63

8. Ibıd , 65, 66

9 Edward and Ilona Teller's ordeal durıng Kun's regıme Blumberg and Owens [1976], 17 ~ 19

10 Ibıd., 20.

11. Quoted ın Tıerney [October 1984], 46

12. Quoted ın Babaı [1996], 56.

13 Quoted in Alexanderson [December 1979], 90

14. FBU. Henrıksen [1997].

15. Barbara Pıranıan and Erdős. Quoted ın ıbıd.

16 Smıth [1997], 83

17 Szekeres [1973], xix, xx
18 Ibid , xxi.
19 Bollobás [December 1996], 4
20 Bollobás [October 17, 1996], 584
21 Newman [1956], 2025
22 A H S [January 22, 1948], 210
23. Russell and Littlewood's praise of Hardy's good looks. Quoted in Bollobás [1986], 120
24 Newman [1956], 2025
25. Snow [1966], 21
26. Quoted in Newman [1956], 2024, 2025
27. 1938 Hardy postcard quoted in Snow [1966], 37
28. Newman [1956], 2026.
29 Deacon [1985], 139.
30. Quoted in Kanigel [1991], 139.
31. Snow [1966], 28
32. Quoted in *Nature* [May 22, 1948], 798
33. Hardy [1940b], 61.
34. Ibid., 71, 72.
35 Quoted in Alladi [December 19, 1987], 8
36. Ramanujan's letter to Hardy. Quoted in Berndt and Rankin [1995], 21, 22
37 Quoted in Russell [1956], 19
38. Quoted in Kanigel [1991], 7.
39. Hardy [1940a], 2
40 Kanigel [1991], 294.
41 Quoted in Alladi [December 19, 1987], 8
42. Hardy [1940a], 12.
43. Quoted in Smith [1997], 82
44. Table of number of primes up to an integer *n* Regis [1987], 74.
45 Highly composite numbers. Honsberger [1985], 193, 194

46 Vázsonyı [December 1996], 59

第 e 章

1 Ulam, Stanıslaw [1976], 134, 135

2 Fnsch [1979], 79

3 Bellman [1984], 102, 103

4 Quoted ın transcnpt of outtakes of Csıcsery [1993]

5 Quoted ın Babaı [1996], 63

6 Quoted ın transcnpt of outtakes of Csıcsery [1993]

7 Ulam, Stanıslaw [1976], 135

8 Golomb [Fall 1996], 6.

9 Pach [Sprıng 1997], 40

10. Babaı [1996], 65, 66

11 Jay-walkıng ıncıdent. Conversatıon wıth Rothschıld; and Babaı [1996], 79

12 Ulam, Stanıslaw [1976], 175 ~ 178.

13. Ibıd , 179

14 Erdős [1985], 447, 449

15 Quoted ın Gardner [March 1964], 122.

16. Ibıd , 124

17. Ulam, Stanıslaw [1976], xııı.

18. Quoted ın Hardy [1940b], 83.

19 Quoted ın Alexanderson [December 1979], 89

20. Osserman [1995], 6.

21. Dostoyevsky [1880], 270, 271.

22. Russell's letter to Frege quoted ın Davıs and Hersh [1980], 332.

23. Russell [1951], 221, 222

24. Russell [1959], 75.

25. Quoted ın Regıs [1987], 53.

26. Quoted ın Sıngh [1997], 160.

27 Russell [1956], 53

28. Abbott [1884], 1
29. Eddington [1920], 131
30. Godel and the citizenship exam. Casti [1990], 373, 374
31. Quoted in Regis [1987], 41
32. Quoted in Arkin [April 1976], 3.
33. Straus [1983], 245, 246.
34. Quoted in Henriksen [1997]
35. Quoted in ibid.
36. Ibid.
37. Pach [Spring 1997], 44

第3章

1. Erdős [March 1971], 3~12
2. Pelikán [1996], 17.
3. Natalija story. Ivic [1997].
4. Pelikán [1996], 17.
5. Golomb [Fall 1996], 7.
6. Golomb [May 27, 1977], 938.
7. Quoted in Tierney [October 1984], 46
8. Vázsonyi, unedited version [December 1996]. Conversation with Vázsonyi resumes with "He told me he was at UCLA."

第π章

1. Quoted in Albers [November 1996], 20.
2. Greedy expansion of 5/121. Michael N. Bleicher, *Excursions into Mathematics* (Worth Publishers, 1969). Quoted in Gardner [October, 1978], 26.
3. Hardy [1940b], 150.
4. Tierney [October 1984], 43.
5. Quoted in Arkin [April 1976], 4.
6. Vázsonyi contemplates giving up mathematics: In conversation; and in

Vázsonyi [December, 1996], 59

7 Quoted in Kac [1985], 93

8 Graham [March 1978], 130, 131

9 Graham [1978], 203.

第4章

1 Nelson, Penny, Pomerance [Spring 1974], 87

2 Quoted in Petrillo [January 11, 1997], B-3

3 Quoted in Mackenzie [February 7, 1997], 759

4 Quoted in Singh [1997], 229

5 Quoted in Dietrich [August 14, 1996], 1

6 Fake e-mail news story. Quoted in Stewart [1987], 46

7 To find out the latest on the largest Sophie Germain primes, check out the url *http://www utm edu/research/primes/largest.html # Sophie.*

8 Quoted in Dalmédico [December 1991], 119

9 Quoted in Bell [1937], 262

10 Ibid

11 The story of Paul Wolfskehl's aborted suicide comes from Davis and Chinn [1969] In a chapter called "The Problem That Saved a Man's Life," Davis and Chinn attribute the details of the story to "the renowned mathematician Alexander Ostrowski Professor Ostrowski himself heard the story many years ago and claims there is more to it than mere legend." But in "Paul Wolfskehl and the Wolfskehl Prize" (*Notices of the American Mathematical Society*, November 1997, vol. 44, no 10), Klaus Barner suggests an alternative explanation. Wolfskehl, who suffered from multiple sclerosis at an early age, was forced by his family to marry an older spinster, Marie Frolich "His wife, Marie, revealed herself as an evil Xanthippe, who made the last years of his life a living hell." He set up the prize, Barner believes, because "number theory, the only true love in his life, had given his last years some meaning. Perhaps the desire not to leave his entire fortune to his loveless wife, Marie, also had a part to play?"

12 Quoted in Ribenboim [1979], 15, 16

13 Bell [1937]

14 Ibid , 20

15 Ibid , 42

16. Quoted in Singh [1997], 6

17 Ribet and Hayes [May-April, 1994], 144

18 Quoted in Singh [1997], 226

19 Quoted in Aczel [1996], 118

20 Quoted in Cipra [1996], 3

21 Quoted in Aczel [1996], 3

22 Quoted in Singh [1997], 270

23 Quoted in Aczel [1996], 4

24 Quoted in Kolata [June 29, 1993], C11

25 only one tenth of 1 percent. Kolata [June 24, 1993], D22

26 Quoted in Singh and Ribet [November 1977], 73.

27. Quoted in Gleick [October 3, 1993], 53.

第5章

1. Ulam, Stanislaw [1976], 288.

2 Smith's phone number. Wilansky [1982], 21

3. Oltikar and Wayland [January 1983], 37

4. Bell [1937], 221

5 Gardner [June 1977], 131.

6. Quoted in Gies [1969], 58.

7. Quoted in Maor [1987], 33 The limits given for the harmonic series also come from Maor.

8 Quoted in Stewart [1987], 67

9. Quoted in Gardner [March 1966], 112

10. Quoted in Dauben [1979], 147.

11. Quoted in ibid., 147

12 Quoted in ibid., 282

13 Quoted in Gardner [March 1966], 112

14 Quoted in Stewart [1987], 67

15 Quoted in ibid., 67.

16 Barrow [1992], 215.

17 Erdős and Graham exchange about the Continuum Hypothesis Reprinted with the permission of the Canadian Broadcasting Corporation It is an excerpt of the outtakes from the radio program "Math and Aftermath: A Tribute to Donald Coxeter," broadcast on the series *Ideas* on May 13, 1997. The program featured *Ideas* host Lister Sinclair and was produced by Sara Wolch.

18 Quoted in Bell [1937], 464

19 Peterson [1998], 40.

第6章

1. Vos Savant [September 9, 1990], 15
2. Letters from Robert Sachs and Scott Smith. Vos Savant [December 2, 1990], 25.
3. Ibid.

4 E. Ray Bobo letter. Vos Savant [February 17, 1991], 12.

5. Ibid.

6 Quoted in Eckhardt [1987], 131.

7. Quoted in Alexanderson [December 1979], 88

8 Quoted in Cerabino [March 11, 1994], 1B.

第7章

1. Quoted in Marshburn [Summer 1996], 7

2 Quoted in ibid., 7.

3. Quoted in Beifuss [March 25, 1996], 1B.
4. Quoted in Marshburn [Summer 1996], 7

第8章

1 A story he told repeatedly in lectures Quoted, for instance, in Csicsery [1993]

2. Details of Nash's life. Nasar [November 13, 1994]

3 Quoted in Regis [1987], 43

原书空白页

参考文献

A H S., January 22, 1948 "Obituary: G H Hardy," *The Oxford Magazine* vol LXVI, no 9.

Abbott, Edwin A 1884 *Flatland: A Romance in Many Dimensions*. Harper Collins, 1983

Aczel, Amir D 1996 *Fermat's Last Theorem: Unlocking the Secret of an Ancient Mathematical Puzzle*. Four Walls Eight Windowes.

Albers, Donald September 1995 "Making Connections," *Math Horizons*. Mathematical Association of America

—— November 1996. "A Nice Genius," *Math Horizons*. Mathematical Association of America

——, and Gerald L. Alexanderson, eds 1985. *Mathematical People: Profiles and Interviews*. Birkhäuser.

Alexanderson, Gerald L December 1979 "Interview with Paul Erdős." In Albers and Alexanderson, eds , 1985

Alladi, Krishnaswami December 19, 1987. "Ramanujan - An Estimation," *The Hindu* [Madras, India]

—— December 26, 1996 "Erdős and Ramanujan," *The Hindu* [Madras, India].

Allstetter, Billy. Spring 1990. "How Many Mathematicians Does It Take to Be a Professor, Research Director, Journal Editor, and World-Class Juggler? Just One—Ronald Graham," *Rutgers*, vol. 69, no. 1

Andor, Farago 1927 *Középiskolai Matematikai Fizikai Lapok* Budapest

Arkin, Joseph. April 1976. A taped interview with Paul Erdős

Babai, László 1996. "In and Out of Hungary: Paul Erdős, His Friends, and Times " In *Combinatorics, Paul Erdős Is Eighty*, vol. 2 Bolyai Society

Mathematical Studies, Budapest
——January/February 1997 "Paul Erdős and the Theory of Computing," *SIAM News*
——. January 1998a "Finite and Transfinite Combinatorics," *Notices of the American Mathematical Society*, vol 45, no 1
——. January 1998b "Paul Erdős Just Left Town," *Notices of the American Mathematical Society*, vol. 45, no. 1.
Barner, Klans November 1997 "Paul Wolfskehl and the Wolfskehl Prize," *Notices of the American Mathematical Society*, vol. 44, no. 10.
Barrow, John D. 1992. *Pi in the Sky: Counting, Thinking, and Being* Little, Brown.
Beckmann, Petr. 1971. *A History of π (PI)* St. Martin's Press, 1974.
Beifuss, John March 23, 1996. "Minister of Math, Calculating Genius at Home with Peers," *The Commercial Appeal* [Memphis].
——. March 25, 1996. "Give Me a Break," *The Commercial Appeal* [Memphis].
Bell, E. T. 1937. *Men of Mathematics*. Simon & Schuster, 1986
Bellman, Richard. 1984. *Eye of the Hurricane: An Autobiography*. World Scientific.
Berndt, Bruce C., and Robert A Rankin 1995. "Ramanujan Letters and Commentary," American Mathematical Society.
Bernstein, Jeremy. 1984. *Three Degrees Above Zero: Bell Labs in the Information Age*. Scribners.
Blumberg, Stanley A, and Gwinn Owens 1976. *Energy and Conflict: The Life and Times of Edward Teller*. G. P. Putnam's Sons.
Bollobás, Béla. 1986. *Littlewood's Miscellany*. Cambridge University Press.
——. October 17, 1996. "Paul Erdős (1913–96)," Obituary, *Nature*, vol. 383, p 584.
——. December 1996. "A Life of Mathematics—Paul Erdős, 1913–1996," *Focus*, vol. 16, no. 6. Mathematical Association of America.
——. 1997 "Paul Erdős—Life and Work" In Ronald L Graham and

Jaroslav Nesetril, eds. 1997a

Borwein, Jonathan M , and Peter B Borwein February 1988 "Ramanujan and Pi," *Scientific American*

Bowers, John F December 22/29, 1983 "Why Are Mathematicians Eccentric?" *New Scientist*

Casti, John L 1990 *Searching for Certainty* William Morrow

Cersbino, Frank. March 11, 1994 "Mathematicians Hit Cntical Mass at FAU Gathenng," *Palm Beach Post* [Flonda]

Chung, Fan, and Ron Graham 1998. *Erdős on Graphs*: *His Legacy of Unsolved Problems*. A K Peteres

Cipra, Barry 1993 "Number Theonsts Uncover a Slew of Pnme Impostors." *What's Happening in the Mathematical Sciences*, vol 1. American Mathematical Society

——. 1994 "A Truly Remarkable Proof." *What's Happening in the Mathematical Sciences*, vol 2. Amencan Mathematical Society

——. February 4, 1994. "Math Attendees Find There's Life After Fermat Proof," *Science*.

—— 1996 "Fermat's Theorem—At Last!" *1995 - 1996 What's Happening in the Mathematical Sciences*. Amencan Mathematical Society

Clawson, Calvin C. 1996. *Mathematical Mystenes*: *The Beauty and Magic of Numbers*. Plenum Press.

Cooper, Necia Grant, ed. 1987. *From Cardinals to Chaos*: *Reflections on the Life and Legacy of Stanislaw Ulam*. Cambndge University Press, 1989

Cooper, Roger, Apnl 13, 1991 "The Inside Story," *Spectator*.

Dr. Crypton. December 1985. "Perfect Numbers," *Science Digest*

Csicsery, George Paul. 1993. "*N Is a Number*: *A Portrait of Paul Erdős*" Documentary film.

Dalméldico, Amy Dahan. December 1991 "Sophie Germain," *Scientific American*.

Dauben, Joseph Warren. 1979 *Georg Cantor*. Pnnceton University Press, 1990.

Davis, Philip J , and William G Chinn 1969 *3 1416 and All That* Simon & Schuster

Davis, Philip J , and Reuben Hersh 1980. *The Mathematical Experience* Birkhauser

Deacon, Richard 1985 *The Cambridge Apostles* Robert Royce

Derks, Sarah A September 24, 1996 "Nomadic Genius Lived for Numbers," *The Commercial Appeal* [Memphis].

Devlin, Keith December 1994 "Mathematician Awarded Nobel Prize," *Focus*, vol 14, no 6 Mathematical Association of America.

——. December 1997 "World's Largest Prime," *Focus*, vol 17, no. 6 Mathematical Association of America

Dietrich, Bill August 14, 1996 "It's Prime Time in Seattle for Mathematical Puzzler," *Seattle Times*.

Dostoyevsky, Fyodor. 1880 *The Brothers Karamazov* Penguin Books, 1993.

Duke, Richard, and Vojtěch Rodl Summer-Fall 1996 "Paul Erdős Won't Be Coming Anymore," *Newsletter of the SIAM Activity Group on Discrete Mathematics*, vol. 7, no 1

Dunham, William 1990. *Journey Through Genius: The Great Theorems of Mathematics*. John Wiley.

—— 1994 *The Mathematical Universe* John Wiley

Eckhardt, Roger. 1987 "Stan Ulam, John von Neumann, and the Monte Carlo Method " In Cooper, Necia. Grant, ed , 1987

Economust, October 5, 1996. Obituary, "Paul Erdős."

Eddington, Sir Arthur. 1920. *Space, Time, and Gravitation* Cambridge University Press

Erdős, Paul March 1971 "Child Prodigies " In James Jordan and William A. Webb, eds., *Proceedings of the Washington State University Conference on Number Theory*. Department of Mathematics and Pi Mu Epsilon, Washington State University, Pullman, WA.

—— 1985 "Ulam, the Man and the Mathematician " *Journal of Graph Theory*, vol 9 John Wiley

—— 1997 "Some of My Favorite Problems and Results " In Ronald L. Graham and Jaroslav Nesetril, eds 1997a

——, and Ronald L Graham July 1975 "On Packing Squares with Equal Squares," *Journal of Combinatorial Theory*, vol 19, no 1

—— 1980 *Old and New Problems and Results in Combinatorial Number Theory*. L'Enseignement Mathématique Université de Genève

Erdős, Paul, and John L Selfridge June 1975 "The Product of Consecutive Integers Is Never a Power," *Illinois Journal of Mathematics*, vol 19, no 2.

Fadiman, Clifton 1957 *Any Number Can Play* World Publishing Company.

Frisch, Otto 1979 *What Little I Remember* Cambridge University Press

Gamow, George 1947 *One Two Three Infinity* Dover, 1988

Gardner, Martin. July 1962 "Fiction About Life in Two Dimensions," Mathematical Games, *Scientific American*

——. March 1964 "The Remarkable Lore of the Prime Numbers," Mathematical Games, *Scientific American*.

——. April 1964. "Various Problems Based on Planar Graphs, or Sets of 'Vertices' Connected by 'Edges,'" Mathematical Games, *Scientific American*.

——. November 1964. "Some Paradoxes and Puzzles Involving Infinite Series and tha Concept of Limit," Mathematical Games, *Scientific American*.

——. March 1966. "The Hierarchy of Infinities and the Problems It Spawns," Mathematical Games, *Scientific American*

——. March 1968. "A Short Treatise on the Useless Elegance of Perfect Numbers and Amicable Pairs," Mathematical Games, *Scientific American*.

——. March 1969. "The Multiple Fascinations of the Fibonacci Sequence," Mathematical Games, *Scientific American*

—— July 1970. "Diophantine Analysis and the Problem of Fermat's Legenday 'Last Theorem,'" Mathematical Games, *Scientific American*

——. July 1974. "On the Patterns and the Unusual Properties of Figurate Numbers," Mathematical Games, *Scientific American*

——. June 1977 "The Concept of Negative Numbers and the Difficulty of

Grasping It," Mathematical Games, *Scientific American*

—— October 1978 "Puzzles and Number-Theory Problems Arising from the Curious Fractions of Ancient Egypt," Mathematical Games, *Scientific American*

—— August 1979 "The Imaginableness of Imaginary Numbers," Mathematical Games, *Scientific American*

—— October 1979 "Some Packing Problems That Cannot Be Solved by Sitting on the Suitcase," Mathematical Games, *Scientific American*

Gies, Joseph and Frances. 1969 *Leonardo of Pisa and the New Mathematics of the Middle Ages*. Thomas Y Crowell.

Gleick, James October 3, 1993 "Fermat's Theorem," *New York Times Magazine*

Goffman, Caspar September 1969 "And What Is Your Erdős Number?" *American Mathematical Monthly*.

Golomb, Michael. May 27, 1977."Paul Erdős: Addenda", *Science*, vol. 196, no. 4293, p. 938.

——. Fall 1996. "Paul Erdős at Purdue," *Math PUrview*, Department of Mathematics, Purdue University

Graham, Ronald L November-December 1964. "A Fibonacci-like Sequence of Composite Numbers," *Mathematics Magazine*, vol. 37, no. 5.

—— 1978 "Combinatorial Scheduling Theory." In Lynn Arthur Steen, ed., *Mathematics Today* Vintage Books, 1980.

—— March 1978. "The Combinatorial Mathematics of Scheduling," *Scientific American*

——, and Jaroslav Nesetril, eds. 1997a. *The Mathematics of Paul Erdős*. Vol. 1. Springer-Verlag.

——, and Jaroslav Nešetril, eds. 1997b *The Mathematics of Paul Erdős* Vol II Springer-Verlag.

——, Bruce L. Rothschild, and Joel H Spencer. 1990. *Ramsey Theory*. John Wiley.

Granville, Andrew, and Ian Katz. June 24, 1993. "The Number's Up for

Math's Last Riddle," *The Guardian* [London]

Grossman, Jerrold W 1997 "Paul Erdős: Master of Collaboration " In Ronald L Graham and Jaroslav Nesetril, eds , 1997b

Guy, Richard K January 10, 1997 "Erdős, Pál, 1913-03-26 to 1996-09-20 " Remarks delivered at the session "A Tribute to Paul Erdős" at the joint meeting of the American Mathematical Society and the Mathematical Association of America, San Diego

Gyárfás, András 1997. "Fruit Salad," *Electronic Journal of Combinatorics*, 4, # R8.

Hajnal, András 1997 "Paul Erdős' Set Theory." In Ronald L Graham and Jaroslav Nesetril, eds., 1997b.

Hall, Tord. 1970. Albert Froderberg, trans. *Carl Friedrich Gauss* MIT Press.

Hardy, G. H. 1940a. *Ramanujan*. Cambridge University Press.

——. 1940b, with a foreword by C P Snow 1967. *A Mathematician's Apology*. Cambridge University Press. 1984.

Hargittai, István Fall 1997. "A Great Communicator of Mathematics and Other Games: A Conversation with Martim Gardner," *The Mathematical Intelligencer*, vol. 19, no. 4.

Hawkins, David. December 1958. "Mathematical Sieves," *Scientific American*.

Henriksen, Melvin. 1997. "Reminiscences of Paul Erdős (1913-1996)," *http://www.maa.org/features/erdos.html* or *The Humanist Mathematics Network Journal*, 15 (1997)

Henrion, Claudia. 1997. *Women in Mathematics: The Addition of Difference* Indiana University Press.

Hoensch, Jorg K. 1988. *A History of Modern Hungary 1867 – 1986*. Longman.

Hoffman, Paul. 1988. *Archimedes' Revenge: The Joys and Perils of Mathematics*. Fawcett Columbine, 1997

Honsberger, Ross. 1970. *Ingenuity in Mathematics*. Random House.

——. 1973. *Mathematical Gems*. Mathematical Association of America.

——. 1976. *Mathematical Gems II*. Mathematical Association of America.

——. 1979 *Mathematical Plums*. Mathematical Association of America.

—— 1985 *Mathematical Gems III* Mathematical Association of America.

Horgan, John March 1997. "Profile: Ronald L Garham," *Scientific American*

Ivić, Aleksandar. 1997 "Remembering Paul Erdős," *Nieuw Archief voor Wiskunde*, vol 15

Kac, Mark 1985 *Enigmas of Chance: An Autobiography* Harper & Row

Kanigel, Robert 1991 *The Man Who Knew Infinity: A Life of the Genius Ramanujan* Charles Scribner's Sons

Kasner, Edward, and James R Newman 1940. *Mathematics and the Imagination* Simon & Schuster.

Kline, Morris September 1964 "Geometry", *Scientific American*.

Koestler, Arthur 1952. *Arrow in the Blue* Macmillan.

Kolata, Gina June 24, 1993. "At Last, Shout of 'Eureka!' in Age-Old Math Mystery," *New York Times*.

—— June 29, 1993 "Math Whiz Who Battled 350 – Year-Old Problem," *New York Times*.

—— September 24, 1997. "Paul Erdos, 83, a Wayfarer in Math's Vanguard, Is Dead," *New York Times*.

Kramer, Edna E. 1970. *The Nature and Growth of Modern Mathematics*. Princeton University Press, 1982.

Larman, D. G. September 28, 1996. Letters to the editor, *The [London] Times*

Lemonick, Michael D. July 5, 1993. "*Fini* to Fermat's Last Theorem," *Time*

Lewis, Harry R., and Christos H Papadimitriou. January 1978 "The Efficiency of Algorithms," *Scientific American*

Lukacs, John 1988 *Budapest 1900*. Grove Press

Mackenzie, Dana February 7, 1997. "Homage to an Itinerant Master." *Science*, vol. 275.

Mahoney, Michael Sean. 1973. *The Mathematical Career of Pierre de Fermat* 2nd ed Princeton University Press. 1994

Maor, Eli 1994 *e*: *The Story of a Number* Princeton University Press.

—— 1987 *To Infinity and Beyond*: *A Cultural History of the Infinite* Princeton University Press, 1991

Marshburn, Elizabeth Walker. Summer 1996 "Prove & Conjecture," *Memphis Magazine*, vol.15, no.2

McCagg, William O 1972. "Jewish Nobles and Geniuses in Modern History," *Eastern European Quarterly*.

Metropolis, N. "The Beginning of the Monte Carlo Method " In Cooper, Necia Grant, ed , 1987

Milne, E. A 1948 "Obituary Notices: Godfrey Harold Hardy " *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol 108

Motz, Lloyd, and Jefferson Hane Weaver 1993 *The Story of Mathematics*. Avon Books, 1995

Nasar, Sylvia. November 13, 1994. "The Lost Years of a Nobel Laureate," *New York Times*. The story of John Nash's schizophrenia.

Nathanson, Melvyn October 19, 1996 "The Erdős Paradox," preprint based on memorial remarks delivered at the conference "Paul Erdős and His Mathematics," Hungarian Academy of Science, Budapest

Nature. May 22, 1948. "Obituaries: Prof G.H Hardy, F R S."

Nelson, Carol, and David E Penny, Carl Pomerance Spring 1974. "714 and 715," *Journal of Recreational Mathematics*, vol 7, no 2.

Newman, James R. 1956. *The World of Mathematics*. vol 4. Simon & Schuster.

Oltikar, Sham, and Keith Wayland January 1983 "Construction of Smith Numbers," *Mathematics Magazine*, vol 56, no 1

Osmond, Warren. October 2, 1996. "Lasting Legacy of Maths Genius," *Campus Review*, vol. 6, no. 38

Osserman, Robert. 1995 *Poetry of the Universe*. Anchor Books

Pach, János Spring 1997. "Two Places at Once: A Remembrance of Paul Erdős," *Mathematical Intelligencer*, vol 19, no. 2.

Pelikán, József. 1996 "Paul Erdős (1913 – 1996)," *Mathematical Competi-*

tions, vol 9, no 2

Peterson, Ivars 1998 *The Jungle of Randomness* John Wiley

Petrillo, Lisa January 11, 1997 "Math Expert Erdős's Career Celebrated at Conference," *San Diego Union - Tribune*

Pomerance, Carl January 1998 "Paul Erdos, Number Theorist Extraordinaire," *Notices of the American Mathematical Society*, vol 45, no. 1.

Prakash. M December 26, 1996. "100 p. c. Pure Talent," *The Hindu* [Madras, India].

Rabson, Alice B October 15, 1996. "Friendship with Math Genius Was an Honor," Letters to the Editor, *Free Lance - Star* [Fredericksburg, VA].

Raeburn, Paul. June 24, 1993 "Princeton Mathematician Claims Solution to Math's Most Famous Problem," Associated Press

Regis, Ed. 1987 *Who Got Einstein's Office?* Addison - Wesley.

Reid, Constance. 1964. *From Zero to Infinity*. Thomas Y. Crowell, 1966.

Rhodes, Richard. 1986. *The Making of the Atomic Bomb*. Simon & Schuster.

Ribenboim, Paulo 1979. *13 Lectures on Fermat's Last Theorem*. Springer - Verlag.

Ribet, Kenneth A., and Brian Hayes. May - April, 1994. "Fermat's Last Theorem and Modern Arithmetic," *American Scientist*, vol. 82.

Roddy, Michael. October 18, 1996. "Mathematicians Mourn Hungary's 'Maths Monk,'" Reuters.

Rota, Gian - Carlo. November 1996. Obituary, *SIAM News*, vol. 29, no. 9. Society for Industrial and Applied Mathematics.

Rucker, Rudy. 1982 *Infinity and the Mind: The Science and Philosophy of the Infinite*. Bantam Books, 1983.

Russell, Bertrand. 1951. *The Autobiography of Bertrand Russell, 1872 - 1914*. Atlantic Monthly Press, 1967.

——. 1956 *Portraits from Memory and Other Essays*. Allen & Unwin.

——. 1959 *My Philosophical Development* Allen & Unwin.

Saville, Kirk March 10, 1995 "Go Figure; Mathematician Paul Erdős Does Not Live Life by the Numbers," *Sun - Sentinel* [Fort Lauderdale].

Sinclair, Lister, host, and Sara Wolch, producer May 13, 1997 Outtakes from a radio interview with Erdős and Graham "Math and Aftermath: A Tribute to Donald Coxeter," part 1 Canadian Broadcasting Corporation

Singh, Simon 1997 *Fermat's Last Theorem* Fourth Estate

——, and Kenneth A Ribet. November 1977 "Fermat's Last Stand," *Scientific American*, vol 277, no 5

Slatner, David 1997 *The Joy of π* Walker

Smith, Cedric A B 1997. "Did Erdos Save Western Civilization?" In Ronald L Graham and Jaroslav Nesetril, eds , 1997a.

Snow, C P 1966 *Variety of Men*. Scribners.

Spencer, Joel. January 1998 "Uncle Paul," *Notices of the American Mathematical Society*, vol 45, no 1

——, ed. 1973. *Paul Erdos: The Art of Counting, Selected Writings*. MIT Press.

Stewart, Ian. 1987 *From Here to Infinity* Oxford University Press, 1996.

——. December 17, 1997. "The Formula Man," *New Scientist*.

Stone, A. H. 1997 "Encounters with Paul Erdős." In Ronald L. Graham and Jaroslav Nešetril, eds., 1997a

Straus, E. G. 1983 "Paul Erdős at 70," *Combinatorica*, vol 3 (3–4)

——. "The Elementary Proof of the Prime Number Theorem" Unpublished manuscript.

Sugar, Peter F , ed 1990. *A History of Hungary* Indiana University Press.

Szekeres, Gy. 1973 "A Combinatorial Problem in Geometry: Reminiscences" In Spencer, ed. 1973.

Tierney, John. October 1984 "Paul Erdos is in Town His Brain is Open" *Science* 84, vol. 5, no. 8

Tőkés, Rudolf L 1967 *Béla Kun and the Hungarian Soviet Republic*. Frederick A. Praeger.

Ulam, Françoise (without a byline) May 6, 1970 "A Visiting Hungarian Nonagenarian," *Town & Country* [Boulder, CO]

——, ed. 1987. "Conversations with Rota" In Cooper, ed , 1987

Ulam, Stanıslaw M 1976 *Adventures of a Mathematıcıan* Charles Scrıbner's Sons, 1983

Vázsonyı, Andrew December 1996 "Paul Erdos," *OR/MS Today*

—— March 1997 "Paul Erdős, Beloved Math Genıus, Leaves Us," *Decısıon Lıne*

Vértesı, Péter January 1998 "Approxımatıon Theory," *Notıces of the Amerıcan Mathematıcal Socıety*, vol 45, no.1

vos Savant, Marılyn September 9, 1990 "Ask Marılyn," *Parade*

—— December 2, 1990. "Ask Marılyn," *Parade*

—— February 17, 1991 "Ask Marılyn," *Parade*

Wells, Davıd 1987 *The Penguın Dıctıonary of Curıous and Interestıng Numbers* Penguın Books

Wılansky, A. 1982. "Smıth Numbers," *Two - Year College Mathematıcs Journal*, vol 13, no. 21

Wılf, Herb January 1997 "A Greetıng; and a Vıew of Rıemann's Hypothesıs," *Amerıcan Mathematıcal Monthly*, vol 94, 1987